

Problema sulla corda

Nella circonferenza di centro O e raggio $2\sqrt{5}a$ si consideri l'angolo al centro $\angle AOB$ tale che risulti $\cos \angle AOB = \frac{3}{5}$. Tracciata la tangente alla circonferenza nel punto A, sia H la proiezione ortogonale di B su detta tangente. Determinare il perimetro e l'area del quadrilatero OAHB e la lunghezza delle sue diagonali.

Soluzione

Facciamo riferimento alla figura riportata a lato (costruita con l'applicazione Cabri) nella quale notiamo che:

- l'angolo $\angle AOB = \alpha$ è acuto perché il suo coseno è positivo;
- il triangolo AOB è isoscele su AB;
- l'angolo BAH è angolo alla circonferenza che insiste sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ ed uguale alla metà dell'angolo $\angle AOB$, angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco;
- nella figura è stata tracciata l'altezza OM del triangolo AOB ed M è punto medio della base AB; OM è anche bisettrice dell'angolo $\angle AOB$.

Ciò premesso, con $r = 2\sqrt{5}a$, si ha:

$$\cos \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5};$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (\text{formula di bisezione});$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\overline{AB} = 2r \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2r}{\sqrt{5}} \quad (\text{teorema della corda});$$

$$\overline{OM} = r \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2r}{\sqrt{5}};$$

dal triangolo rettangolo ABH si ricava:

$$\overline{AH} = \overline{AB} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2r}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4r}{5}; \quad \overline{HB} = \overline{AB} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2r}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2r}{5}$$

Calcolo del perimetro e dell'area del quadrilatero OAHB

$$Per_{(OAHB)} = 2\overline{OA} + \overline{AH} + \overline{HB} = \frac{16r}{5} = \frac{32\sqrt{5}}{5}a$$

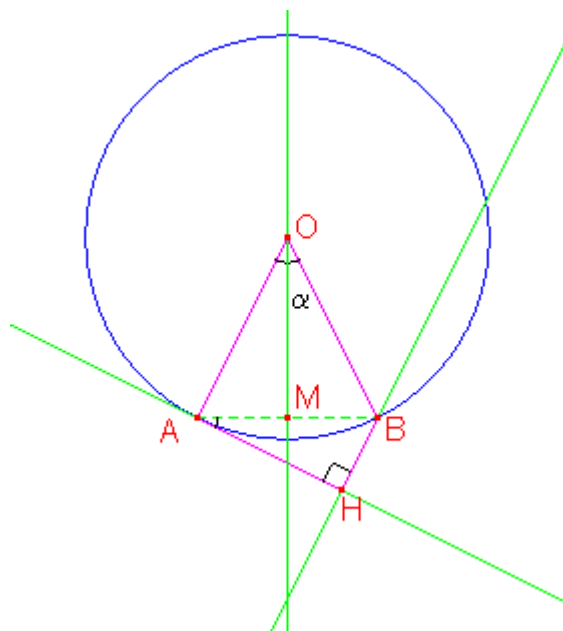
L'area si può ricavare come somma delle aree dei due triangoli OAB, AHB. Si ha

$$Area_{(OAHB)} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} \cdot \overline{OM} + \overline{AH} \cdot \overline{HB}) = \frac{6r^2}{5} = 24a^2$$

Misure delle diagonali del quadrilatero

$$\overline{AB} = \frac{2r}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 2\sqrt{5}a; \text{ per la diagonale OH, applicando il teorema di Pitagora al triangolo}$$

$$\text{rettangolo OAH si ha: } \overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{r^2 + \frac{16}{25}r^2} = \frac{\sqrt{41}}{5}r = \frac{2\sqrt{205}}{5}a$$



[modifica la figura con Cabri](#)