Trigonometria
Applicazione dei teoremi sui triangoli

Problema_2[1]

Considerata una circonferenza γ di raggio $r = 4\sqrt{6}cm$, sia AB una corda di misura $\overline{AB} = 12\sqrt{2}cm$.

1) Dimostrare che AB è lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza.
2) Sia P un punto su γ appartenente al maggiore dei due archi determinati da AB. Posto $A\hat{B}P = x$, determinare al variare del punto P sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ l'espressione della funzione $f(x) = \dfrac{\overline{AP} + \overline{BP}}{\overline{AB}}$.
3) Riconosciuto che $f(x) = 3senx + \sqrt{3}\cos x$, risolvere l'equazione $f(x) = 2\sqrt{3}$.
4) Dopo aver scritto la funzione $f(x)$ nella forma $f(x) = ksen(x+\varphi)$, con k e φ costanti da determinare, relativamente al problema geometrico assegnato, calcolare il valore massimo della funzione e precisare per quale valore di *x* lo stesso viene assunto.
5) Relativamente al problema geometrico affrontato rappresentare il diagramma della funzione $y = f(x)$

Soluzione

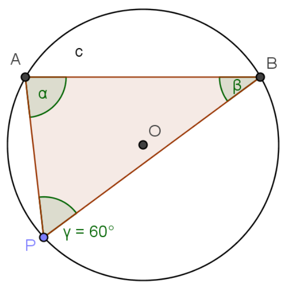
1) Facciamo riferimento alla figura riportata a lato.

Indicato con γ l'angolo nel vertice P del triangolo ABP, dal teorema della corda applicato ad AB, con *r* raggio della circonferenza, si ha:

$$\overline{AB} = 2rsen\gamma \rightarrow sen\gamma = \frac{\overline{AB}}{2r} = \frac{12\sqrt{2}cm}{2\cdot 4\sqrt{6}cm} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

da cui si deduce che $\gamma = 60°$

Dunque AB è il lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza.



2) Con $A\hat{B}P = \beta$, si deduce che $P\hat{A}B = 180° - (60° + \beta)$ e dal teorema dei seni applicato al triangolo ABP si ha

$$\frac{\overline{BP}}{sen(180° - (60° + \beta))} = \frac{\overline{AB}}{sen60°} \rightarrow \qquad \text{(con } x \text{ in luogo di } \beta)$$

$$\overline{BP} = \frac{\overline{AB}}{sen60°}\cdot sen(60° + x) = 4\sqrt{6}\left(\sqrt{3}\cos x + senx\right)cm$$

Espressione della funzione

$$f(x) = \frac{\overline{AP} + \overline{BP}}{\overline{AB}} = 3senx + \sqrt{3}\cos x \text{, con } x \in [0;120°].$$

3) Equazione $f(x) = 2\sqrt{3} \rightarrow \quad 3senx + \sqrt{3}\cos x = 2\sqrt{3} \rightarrow x = 60°$.
4) Tenendo conto delle formule di addizione per il seno, dopo alcune elaborazioni si perviene per la funzione alla forma seguente: $f(x) = 2\sqrt{3}sen(x + 30°)$

Con *x* variabile nel dominio indicato [0°;120°], la funzione assume il valore massimo allorché la funzione $sen(x + 30°)$ assume il suo massimo. Poiché quest'ultima assume come valore massimo 1 (uno) per *x*=60° e questo è un valore del dominio della variabile,

[1] Problema_2 assegnato nel compito in classe M5_4I-30-03-10

deduciamo che anche la funzione $f(x)$ assume il suo valore massimo, e vale $Max = 2\sqrt{3}$ per x=60°.

Osservazione

Per x=60° il triangolo ABP è equilatero.

5) Comando per la rappresentazione del diagramma della funzione con GeoGebra
f=Curva[t,2*sqrt(3)*sin(t+Pi/6),t,0,2*Pi/3]
N.B. Come parametro non può essere scelta la lettera x.

6) Il valore Massimo della funzione è l'ordinata del punto di contatto tra la sinusoide e la retta tangente