Trigonometria
Applicazione dei teoremi sui triangoli

Problema_1[1]

Nel triangolo ABC è noto che $\overline{AB}=13cm$, $\overline{AC}=9cm$ e $sen\alpha=\frac{5}{13}$.

1) Calcolare l'area e la misura del perimetro del triangolo, precisando se esistano uno o più triangoli aventi le caratteristiche indicate.
2) In relazione alle risposte fornite nel precedente punto, determinare le misure dei raggi della circonferenza inscritta e della circonferenza circoscritta al triangolo ABC.

Soluzione

1) **Area del triangolo**

Poiché del triangolo si conoscono le misure di due lati ed il seno dell'angolo compreso si può determinare subito il valore dell'area S.

$$S(ABC)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot sen\alpha=\frac{1}{2}\cdot 13cm\cdot 9cm\cdot\frac{5}{13}=\frac{45}{2}cm^2$$

Perimetro.

Occorre determinare la misura dl terzo lato BC, che può essere trovata applicando il teorema del coseno. Prima di procedere occorre però notare che la conoscenza di $sen\alpha$ non permette di determinare univocamente l'ampiezza dell'angolo; esistono infatti due angoli, uno acuto ed un altro ottuso che hanno lo stesso valore del seno e dunque esistono due triangoli con le caratteristiche indicate.

Primo triangolo

$$sen\alpha=\frac{5}{13},\ \cos\alpha=\frac{12}{13}\rightarrow$$

$$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos\alpha}=\sqrt{169+81-2\cdot 13\cdot 9\cdot\frac{12}{13}}=\sqrt{34}.$$

Perimetro: $2P(ABC)=\left(22+\sqrt{34}\right)cm$

Secondo triangolo

$$sen\alpha=\frac{5}{13},\ \cos\alpha=-\frac{12}{13}\rightarrow$$

$$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos\alpha}=\sqrt{169+81+2\cdot 13\cdot 9\cdot\frac{12}{13}}=\sqrt{466}$$

Perimetro: $2P(ABC)=\left(22+\sqrt{466}\right)cm$

2) Ricordiamo che in un triangolo qualsiasi il rapporto tra la misura di un lato ed il seno dell'angolo opposto è uguale alla misura del diametro della circonferenza circoscritta. Considerando il lato BC, per i due triangoli indicati la misura del raggio richiesto è:

(primo triangolo) $R_1=\frac{\overline{BC}}{2sen\alpha}=\frac{\sqrt{34}}{2\cdot\frac{5}{13}}cm=\frac{13}{10}\sqrt{34}cm$;

(secondo triangolo) $R_2=\frac{\overline{BC}}{2sen\alpha}=\frac{\sqrt{466}}{2\cdot\frac{5}{13}}cm=\frac{13}{10}\sqrt{466}cm$

Raggio della circonferenza inscritta

[1] Problema_1 assegnato nel compito in classe M5_4I-30-03-10

Ricordiamo che l'area di un triangolo si può determinare anche come il prodotto della misura del semiperimetro con la misura del raggio r della circonferenza inscritta al triangolo (il raggio è detto anche apotema del triangolo); pertanto, avendo già l'area del triangolo, con la formula inversa otteniamo:

primo triangolo: $$r=\frac{Area\left(ABC\right)}{semiper\left(ABC\right)}=\frac{45}{2}cm^2\cdot\frac{2}{\left(22+\sqrt{34}\right)cm}=\frac{22-\sqrt{34}}{10}cm$$

secondo triangolo: $$r=\frac{Area\left(ABC\right)}{semiper\left(ABC\right)}=\frac{45}{2}cm^2\cdot\frac{2}{\left(22+\sqrt{466}\right)cm}=\frac{5\left(22-\sqrt{466}\right)}{2}cm$$