TRIGONOMETRIA

Problema su un triangolo isoscele particolare

Nel triangolo isoscele ABC, isoscele sulla base BC, l'altezza BH relativa al lato AC divide questo nei due segmenti AH e CH tali che AH=2HC. Determinare le ampiezze degli angoli del triangolo ABC.

Elaborazioni

Facciamo riferimento al triangolo riportato in Figura 1, nella quale sono state tracciate l'altezza BH relativa al lato AC e l'altezza AM relativa alla base BC.

Strategia risolutiva

Nel triangolo ABC è stata indicata con α la misura dell'angolo MAC, che è la metà della misura dell'angolo nel vertice A, perché AM è anche bisettrice di $\hat{A}$.

Risolveremo il problema cercando una relazione tra le ampiezze degli angoli del triangolo sfruttando le informazioni che si hanno sul triangolo isoscele ABC: in particolare che l'altezza BH divide il lato obliquo AC in due parti delle quali una è doppia dell'altra. Cercheremo la relazione utilizzando l'area del triangolo ABC esprimendola in due diversi modi: in uno utilizzando come base BC e l'altezza AM, nell'altro utilizzando come base AC e la relativa altezza BH. Otterremo un'equazione goniometrica dell'incognita α risolvendo la quale determineremo l'ampiezza α, che soddisfa la condizione 0°<α<90°.

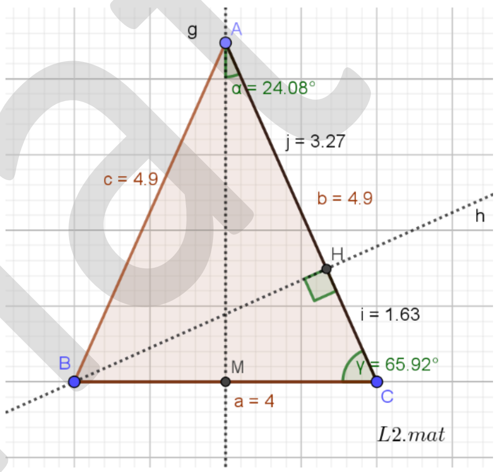

Figura 1- Il triangolo isoscele ABC rappresentato corrisponde alle caratteristiche richieste dal problema. Si osservi che CH=i=1,63u, AH=j=3,27u e nei limiti delle approssimazioni numeriche relative alla figura risulta AH≈2CH. L'ampiezza dell'angolo è $\alpha = arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Risoluzione

$$\begin{cases} Area(ABC) = \dfrac{BC \cdot AM}{2} \\ Area(ABC) = \dfrac{AC \cdot BH}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad BC \cdot AM = AC \cdot BH$$

Dal triangolo rettangolo BHC si ha $BC = \dfrac{CH}{sen(\alpha)} = \dfrac{AC}{3 \cdot sen(\alpha)}$, perché CH=AC/3;

dal triangolo rettangolo AMC si ha $AM = AC \cdot \cos(\alpha)$;

dal triangolo rettangolo AHB si ha $BH = AB \cdot sen(2\alpha) = AC \cdot sen(2\alpha)$.

Possiamo scrivere in funzione di α l'uguaglianza

$$BC \cdot AM = AC \cdot BH \rightarrow \frac{AC}{3 \cdot sen(\alpha)} \cdot AC \cdot \cos(\alpha) = AC \cdot AC \cdot sen(2\alpha)$$

da cui, semplificando AC², si deduce l'equazione $\frac{\cos(\alpha)}{3\cdot sen(\alpha)} = sen(2\alpha) \to \frac{\cos(\alpha)}{3\cdot sen(\alpha)} = 2sen(\alpha)\cos(\alpha) \to$ $\frac{1}{3\cdot sen(\alpha)} = 2sen(\alpha) \to sen^2(\alpha) = \frac{1}{6} \to sen(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{6}} \to \alpha = arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, quindi $\alpha = (24,09448...)° \simeq 24°5'41"$.

Gli angoli del triangolo ABC misurano: $A = (48,1896...)° \simeq 48°11'22"$, $B = C = 65°54'19"$.