Trigonometria

Problema su un settore circolare di ampiezza 120°

Problema

Sia AOB un settore circolare di ampiezza 120° ed M il punto medio dell'arco $\overset{\frown}{AB}$. Prendere un punto Q internamente all'arco $\overset{\frown}{AM}$ e il punto P internamente all'arco $\overset{\frown}{MB}$ in modo che l'ampiezza dell'angolo $P\hat{O}M$ superi di 30° quella dell'angolo $M\hat{O}Q$. Detto Q' il punto di intersezione della retta condotta da Q e parallela al raggio AM con il raggio OA e P' l'intersezione della retta per P parallela ad AM con il raggio OB, determinare la posizione di Q in modo che risulti $\frac{\overline{PP'}}{\overline{QQ'}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Elaborazioni

Facciamo riferimento alla Figura 1.

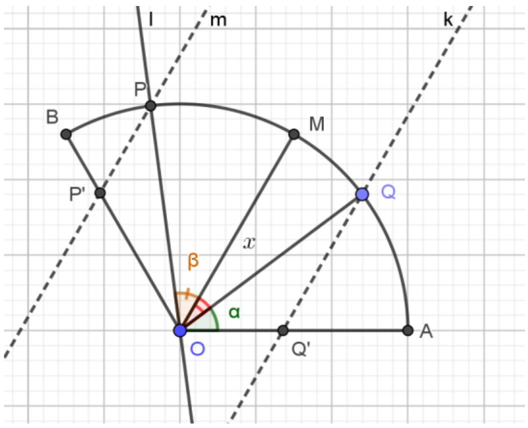

Figura 1

Indichiamo con x l'ampiezza dell'angolo $M\hat{O}Q$ e osserviamo che dovendo essere il punto Q interno all'arco $\overset{\frown}{AM}$ la variabilità di x sarà 0<x<60°.

L'angolo $P\hat{O}M$, in figura indicato con β, ha ampiezza x+30° e poiché P deve essere interno all'arco $\overset{\frown}{MB}$ deve risultare 0°< x+30°<60°, quindi la variabile x deve soddisfare la doppia disuguaglianza 0°< x<30°. L'angolo $A\hat{O}Q$, indicato in figura con α, ha ampiezza 60°-x perché M è punto medio dell'arco $\overset{\frown}{AB}$, quindi l'angolo $A\hat{O}M$ misura 60°. Ancora, l'angolo $Q\hat{Q'}O$ ha ampiezza 120° perché è coniugato interno con l'angolo $A\hat{O}M$ rispetto alle rette parallele OM, QQ' tagliate dalla trasversale OA.

Sia r la misura del raggio del settore circolare.

Applicando il **teorema dei seni** al triangolo OQQ' ricaviamo

$$\frac{\overline{QQ'}}{sen(\alpha)}=\frac{\overline{OQ}}{sen(O\hat{Q'}Q)}\text{,quindi }\frac{\overline{QQ'}}{sen(60°-x)}=\frac{r}{sen(120°)}\rightarrow\overline{QQ'}=\frac{r\cdot sen(60°-x)}{sen(120°)}=r\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot sen(60°-x).$$

Consideriamo ora il triangolo PP'O. L'angolo $P'\hat{P}O$ forma con l'angolo $P\hat{O}M$ una coppia di angoli alterni interni rispetto alle parallele PP', OM tagliate da PO, dunque $P'\hat{P}O$ ha ampiezza β=x+30°. L'angolo $P\hat{P'}O$ è supplementare dell'angolo $B\hat{O}M$, che misura 60°, dunque ha ampiezza 120°. Applicando il **teorema dei seni** al triangolo PP'O ricaviamo:

$$\frac{\overline{PP'}}{sen(P'\hat{O}P)}=\frac{\overline{OP}}{sen(P\hat{P'}O)}\rightarrow\frac{\overline{PP'}}{sen(30°-x)}=\frac{r}{sen(120°)}\rightarrow\overline{PP'}=r\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot sen(30°-x).$$

Consideriamo ora la relazione geometrica che deve essere soddisfatta

$$\frac{\overline{PP'}}{\overline{QQ'}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\rightarrow\frac{r\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot sen\left(30°-x\right)}{r\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot sen\left(60°-x\right)}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\rightarrow\frac{sen\left(30°-x\right)}{sen\left(60°-x\right)}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Tenendo presente l condizione 0°< x<30° per la variabile x possiamo trasformare la precedente equazione come segue, applicando anche la formula di sottrazione per la funzione seno.

$$2sen\left(30°-x\right)=\left(\sqrt{3}-1\right)sen\left(60°-x\right)\rightarrow 2\left(sen30°\cdot\cos x-\cos 30°\cdot senx\right)=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(sen60°\cdot\cos x-\cos 60°\cdot senx\right)\rightarrow$$

$$2\left(\frac{1}{2}\cdot\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot senx\right)=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x-\frac{1}{2}\cdot senx\right)\rightarrow 2\left(\cos x-\sqrt{3}\cdot senx\right)=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}\cdot\cos x-senx\right)\rightarrow$$

$$\left[2-\left(3-\sqrt{3}\right)\right]\cos x=\left[2\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}-1\right)\right]senx\rightarrow\left(\sqrt{3}-1\right)\cos x=\left(\sqrt{3}+1\right)senx\rightarrow\frac{senx}{\cos x}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=$$

$\frac{4-2\sqrt{3}}{3-1}=2-\sqrt{3}$, dunque deve essere $tgx=2-\sqrt{3}$, perciò, in base alla variabilità di x l'unico valore che soddisfa l'equazione è $x=arctg\left(2-\sqrt{3}\right)=15°$.

In Figura 2 è riprodotta la figura geometrica corrispondente alla posizione in cui deve essere preso il punto Q affinché sia soddisfatta la relazione richiesta nel testo del problema: x=15°.

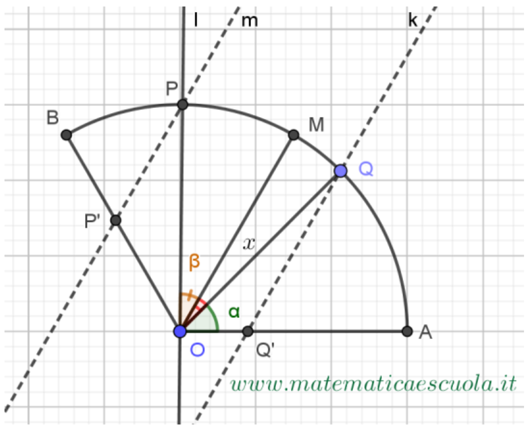

Figura 2