

Trigonometria

Semicirconferenza. Il perimetro di un pentagono variabile

Sia γ una semicirconferenza di diametro $AB=2r$ e C il punto medio dell'arco AB . Fissare un punto P sull'arco BC di γ e tracciare la tangente t_p in P a γ . Tracciare le tangenti t_B e t_C a γ rispettivamente in B e C e indicare con D ed E le loro intersezioni con t_p . Indicata con α l'ampiezza dell'angolo BOP esprimere in funzione di α e di r l'area del pentagono $OBDEC$ e precisare per quali posizioni di P il suddetto perimetro misura $11r/3$.

Soluzione

Facciamo riferimento alla Figura 1.

- 1) Osserviamo che dal punto D partono i segmenti DP , DB entrambi tangenti alla semicirconferenza, quindi i due segmenti sono tra loro congruenti e l'angolo BOD misura $\alpha/2$ (teorema delle tangenti condotte da un punto esterno ad una circonferenza). Dal triangolo rettangolo OBD deduciamo che

$$\overline{BD} = \overline{OB} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

e quindi anche $\overline{DP} = r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

- 2) Misura del lato DE . Occorre calcolare la misura del segmento PE . Osserviamo che l'angolo $POE = \beta$ è metà di $POC = (90^\circ - \alpha)$, quindi dal triangolo rettangolo OPE otteniamo

$$\overline{PE} = \overline{OP} \cdot \operatorname{tg} \beta = r \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{90^\circ - \alpha}{2} \right).$$

In definitiva possiamo scrivere $\overline{DE} = \overline{DP} + \overline{PE} = r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + r \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{90^\circ - \alpha}{2} \right)$

- 3) Il lato EC è congruente al segmento PE , dunque $r \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{90^\circ - \alpha}{2} \right)$.

- 4) Siamo ora in grado di scrivere la misura del perimetro del pentagono $OBDEC$. Si ha:

$$2p(\text{OBDEC}) = \overline{OB} + \overline{BD} + \overline{DE} + \overline{EC} + \overline{OC} = 2r + 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 2r \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{90^\circ - \alpha}{2} \right)$$

Variabilità dell'angolo α : osserviamo che α varia nell'intervallo $[0^\circ; 90^\circ]$.

- 5) Caso particolare da studiare $2p=11r/3$

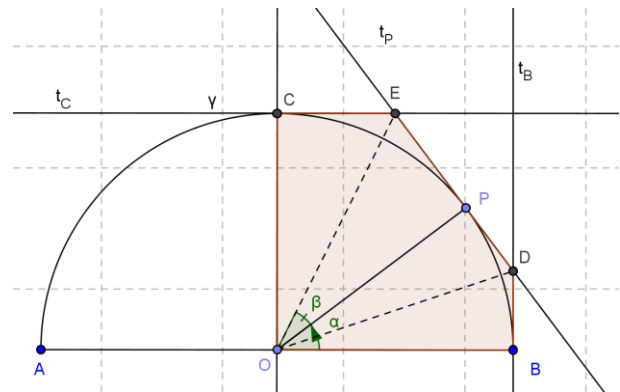


Figura 1-In questa figura la posizione del punto P è approssimativamente quella richiesta dal problema affinché il perimetro del pentagono $OBDEC$ sia $11r/3$.

Si deve risolvere l'equazione goniometrica $2r + 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 2r \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{90^\circ - \alpha}{2} \right) = \frac{11}{3} r$ che si

semplifica nella forma seguente

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \left(\frac{90^\circ - \alpha}{2} \right) = \frac{5}{6}$$

Trasformiamo quest'equazione sfruttando l'espressione di $\operatorname{tg}(\alpha/2)$ ottenuta dall'applicazione delle formule di bisezione. È noto che:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad \text{e quindi anche} \quad \operatorname{tg} \left(\frac{90^\circ - \alpha}{2} \right) = \frac{\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)}{1 + \cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha}.$$

Si ottiene l'equazione seguente

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha} = \frac{5}{6} \rightarrow \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot (1 + \operatorname{sen} \alpha) + \cos \alpha (1 + \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)(1 + \operatorname{sen} \alpha)} = \frac{5}{6} \rightarrow$$

$$5 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha - 1 = 0$$

L'equazione ottenuta è simmetrica in $\operatorname{sen} \alpha$ e $\cos \alpha$ e la affrontiamo con il cambio di variabile ponendo $\alpha = 45^\circ - \omega$. Procediamo.

$5 \operatorname{sen}(45^\circ - \omega) \cos(45^\circ - \omega) - \operatorname{sen}(45^\circ - \omega) - \cos(45^\circ - \omega) - 1 = 0$ e dopo alcune elaborazioni si perviene all'equazione seguente

$$10 \cos^2 \omega - 2\sqrt{2} \cos \omega - 7 = 0, \quad \text{soddisfatta per} \quad \left(\cos \omega = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \vee \left(\cos \omega = \frac{7\sqrt{2}}{10} \right).$$

Si hanno i seguenti valori per l'angolo ω :

$$\omega_1 = 135^\circ, \quad \omega_2 = 225^\circ, \quad \omega_3 = \arccos \left(\frac{7\sqrt{2}}{10} \right) = 8^\circ 7' 48'', \quad \omega_4 = 351^\circ 52' 12'', \quad \text{ai quali, in virtù del}$$

cambio di variabile, corrispondono i valori seguenti per α :

$$\alpha_1 = 45^\circ - 135^\circ = -90^\circ, \quad \text{non accettabile per il dominio;}$$

$$\alpha_2 = 45^\circ - 225^\circ = -180^\circ, \quad \text{non accettabile per il dominio;}$$

$$\alpha_3 = 45^\circ - 8^\circ 7' 48'' = 36^\circ 52' 12'', \quad \text{valore accettabile per il dominio;}$$

$$\alpha_4 = 45^\circ - 351^\circ 52' 12'' = -306^\circ 52' 12'', \quad \text{non accettabile per il dominio.}$$

Concludiamo che il problema affrontato ammette una sola soluzione che corrisponde alla posizione del punto P per la quale risulta $\alpha = 36^\circ 52' 12''$.