Trigonometria

Problema risolto con un'equazione lineare in $sen\alpha$ e $cos\alpha$

Problema

Considerato il triangolo rettangolo isoscele ABC, con angolo retto in A, sia l la misura di ciascuno dei due cateti. Fissare sull'ipotenusa BC un punto D e determinare in funzione dell'ampiezza dell'angolo BAD=α la somma delle misure dei segmenti AD, DE.

Stabilire per quale posizione del punto D la somma delle precedenti misure vale $\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)l}{2}$.

Soluzione

Facciamo riferimento alla Figura 1 corrispondente alle caratteristiche indicate nel testo.

Il triangolo ABC è rettangolo isoscele, quindi i suoi angoli acuti misurano 45°.

Indicata con α l'ampiezza dell'angolo BAD, notiamo che l'angolo ADB ha ampiezza $\delta = 180° - (45 + \alpha) = 135° - \alpha$; inoltre, al variare del punto D sull'ipotenusa BC l'angolo α varia nell'intervallo [0;90°].

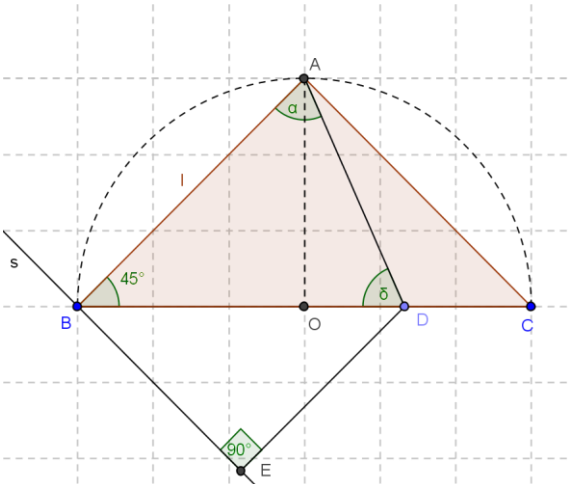


Figura 1

Calcolo delle misure dei segmenti AD, DE

Misura di AD

Applichiamo al triangolo ABD il teorema dei seni.

$$\frac{\overline{AB}}{sen\delta} = \frac{\overline{AD}}{sen45°} \rightarrow \overline{AD} = \frac{\overline{AB}}{sen\delta} \cdot sen45° = \frac{l\sqrt{2}}{2 \cdot sen(135° - \alpha)}$$

Misura di DE

Determiniamo prima la misura di BD dal triangolo ABD applicando ancora il teorema dei seni, quindi troviamo la misura di DE dal triangolo rettangolo BDE.

$$\frac{\overline{BD}}{sen\alpha} = \frac{\overline{AB}}{sen(135° - \alpha)} \rightarrow \overline{BD} = \frac{l \cdot sen\alpha}{sen(135° - \alpha)}$$

Osserviamo ora che Il triangolo BDE è rettangolo isoscele, quindi si ha

$$\overline{DE} = \overline{BD} \cdot sen45° = \frac{l \cdot sen\alpha}{sen(135° - \alpha)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Somma AD+DE e relazione da studiare

$\overline{AD}+\overline{DE}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)l}{2}\rightarrow\dfrac{l\sqrt{2}}{2\cdot sen\left(135°-\alpha\right)}+\dfrac{l\cdot sen\alpha}{sen\left(135°-\alpha\right)}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)l}{2}$, che diventa

$\sqrt{2}+\sqrt{2}sen\alpha=\left(\sqrt{2}+1\right)sen\left(135°-\alpha\right)$, quindi

$\sqrt{2}+\sqrt{2}sen\alpha=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(sen135°\cdot\cos\alpha-\cos135°\cdot sen\alpha\right)\rightarrow$

$2\left(1+sen\alpha\right)=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\cos\alpha+sen\alpha\right)\rightarrow\left(\sqrt{2}-1\right)sen\alpha+\left(\sqrt{2}+1\right)\cos\alpha=2$ (*)

Risolviamo l'equazione goniometrica ottenuta nell'intervallo [0;90°] applicando il **metodo grafico**.

Poniamo $\cos\alpha=\mathrm{X}$, $sen\alpha=Y$ e osserviamo che dalla relazione goniometrica fondamentale

$\cos^2\alpha+sen^2\alpha=1$

si ricava l'equazione cartesiana $X^2+Y^2=1$, che rappresenta nel piano cartesiano la circonferenza di centro l'origine O(0;0) e raggio unitario. Impostiamo il sistema formato da quest'equazione e quella corrispondente all'equazione goniometrica (*) con le sostituzioni indicate. Il sistema da risolvere è

$$\begin{cases}\left(\sqrt{2}-1\right)Y+\left(\sqrt{2}+1\right)X=2\\ X^2+Y^2=1\end{cases}$$

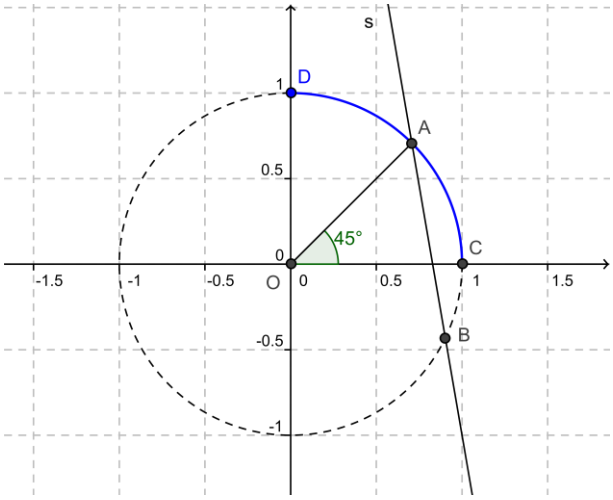


Figura 2

Risolviamo il sistema con il metodo di sostituzione; ricaviamo X dall'equazione di primo grado.

$$\begin{cases}X=\dfrac{2-\left(\sqrt{2}-1\right)Y}{\sqrt{2}+1}\\ \left(\dfrac{2-\left(\sqrt{2}-1\right)Y}{\sqrt{2}+1}\right)^2+Y^2=1\end{cases}$$, si ottiene

l'equazione risolvente

$6Y^2-4\left(\sqrt{2}-1\right)Y+1-2\sqrt{2}=0$, le cui radici

sono $Y_1=\dfrac{\sqrt{2}-4}{6}<0$, $Y_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Osserviamo che **l'arco utile della circonferenza** per le intersezioni con la retta **s** la cui equazione è stata ottenuta dall'equazione goniometrica **è quello del primo quadrante**, l'arco CD in Figura 2, quindi deve risultare $0\le Y\le 1$ e perciò delle due soluzioni trovate è accettabile solo Y_2. Al valore Y_2 corrisponde per X il valore:

$X=\dfrac{2-\left(\sqrt{2}-1\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Alla coppia ordinata $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ corrisponde il punto A in Figura 2.

Conclusione- Il valore dell'angolo α che risolve il problema è $\alpha=45°$ e per detto valore in Figura 1 il punto D si sovrappone al punto medio O dell'ipotenusa.