Trigonometria

Applicazione dei teoremi sui triangoli rettangoli

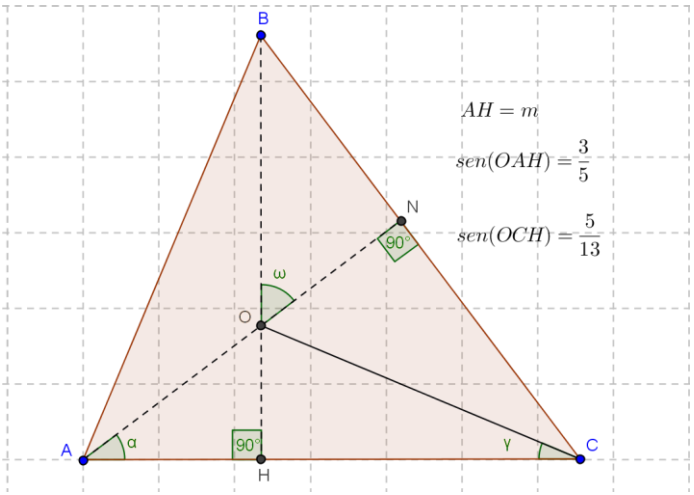
Problema[1]

In un triangolo acutangolo ABC, O è l'ortocentro e H la proiezione di B su AC, mentre N è la proiezione di A su BC. Sapendo che AH misura m, $sen\left(OAH\right)=\frac{3}{5}$ e $sen\left(OCH\right)=\frac{5}{13}$, determina le misure dei segmenti AO, OC, NC, BN, AB. Determina inoltre il valore $tan\left(ABC\right)$.

Risposte: $\frac{5}{4}m$; $\frac{39}{20}m$; $\frac{42}{25}m$; $\frac{33}{25}m$; $\frac{13}{5}m$; $\frac{56}{33}$

Soluzione

Analisi e risoluzione del problema



Nella risoluzione si tenga presente che gli angoli α, γ, ω sono acuti.

1) Misura di AO

Osserviamo che dal triangolo rettangolo AOH, con $\overline{AH}=m$ e $OAH=\alpha$, si ha

$\overline{AO}=\frac{\overline{AH}}{\cos\alpha}$, e poiché $sen\alpha=\frac{3}{5}$ si ricava

$\cos\alpha=\sqrt{1-sen^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$, da cui $\overline{AO}=\frac{5}{4}m$.

2) Misura di OC

Consideriamo il triangolo rettangolo OHC del quale OC è l'ipotenusa. Possiamo trovare la misura del cateto OH dal triangolo OHA e utilizzarla per trovare la misura di OC. Si ha

$$\overline{OH}=\overline{AO}\cdot sen\alpha=\frac{5}{4}m\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{4}m$$

Con $OCH=\gamma$ e $sen\left(OCH\right)=\frac{5}{13}$ si ricava $\overline{OC}=\frac{\overline{OH}}{sen\gamma}=\frac{3}{4}m:\frac{5}{13}=\frac{39}{20}m$

3) Misura di NC

[1] Il testo del problema è presente sul Volume 4 - Lineamenti.MATH BLU, a pag. 399, Autori P. Baroncini, R.Manfredi, I. Fragni, Eitore Ghisetti e Corvi; ISBN:978-88-538—0432-7.

Troviamo prima la misura del segmento HC dal triangolo rettangolo OHC, quindi, tramite la misura di AC=AH+HC, si potrà trovare la misura di NC, cateto del triangolo ANC.

Si ha: $\frac{\overline{OH}}{\overline{HC}} = tg\gamma \rightarrow \overline{HC} = \frac{\overline{OH}}{tg\gamma}$; $tg\gamma = \frac{sen\gamma}{\cos\gamma} = \frac{sen\gamma}{\sqrt{1-sen^2\gamma}} = \frac{\frac{5}{13}}{\sqrt{1-\frac{25}{169}}} = \frac{5}{12} \rightarrow$

$$\overline{HC} = \frac{\overline{OH}}{tg\gamma} = \frac{3}{4}m : \frac{5}{12} = \frac{9}{5}m \rightarrow \overline{AC} = \overline{AH} + \overline{HC} = m + \frac{9}{5}m = \frac{14}{5}m\,.$$

$$\overline{NC} = \overline{AC} \cdot sen\alpha = \frac{14}{5}m \cdot \frac{3}{5} = \frac{42}{25}m$$

4) Misura di BN

Si può determinare la misura del cateto ON con il teorema di Pitagora applicato al triangolo OCN e successivamente utilizzare il triangolo rettangolo ONB nel quale l'angolo acuto in O, indicato in figura con ω, è complementare di α, quindi se ne conoscono le funzioni goniometriche.

$$\overline{ON} = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{NC}^2} = \sqrt{\left(\frac{39}{20}m\right)^2 - \left(\frac{42}{25}m\right)^2} = \ldots = \frac{99}{100}m$$

$$\overline{BN} = \overline{ON} \cdot tg\omega = \overline{ON} \cdot tg\left(90° - \alpha\right) = \overline{ON} \cdot \cot g\alpha\,; \quad \cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{4}{3}\,; \rightarrow$$

$$\overline{BN} = \frac{99}{100}m \cdot \frac{4}{3} = \frac{33}{25}m\,.$$

5) Misura di AB

Possiamo trovare la misura di AN e applicare il teorema di Pitagora al triangolo ANB.

$$\overline{AN} = \overline{AO} + \overline{ON} = \frac{5}{4}m + \frac{99}{100}m = \frac{56}{25}m\,;$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AN}^2 + \overline{NB}^2} = \sqrt{\left(\frac{56}{25}m\right)^2 + \left(\frac{33}{25}m\right)^2} = \ldots = \frac{13}{5}m$$

6) Calcolo di $tan\left(ABC\right) = \frac{5}{13}$

$$tan\left(ABC\right) = \frac{\overline{AN}}{\overline{BN}} = \frac{56}{25}m : \left(\frac{33}{25}m\right) = \frac{56}{33}$$