Trigonometria

Su un triangolo rettangolo avente due mediane tra loro perpendicolari

Problema

Sia ABC un triangolo rettangolo con l'angolo retto in A tale che le mediane AM, CN siano tra loro perpendicolari. Determinare il rapporto tra le misure del cateto AB e l'ipotenusa BC.

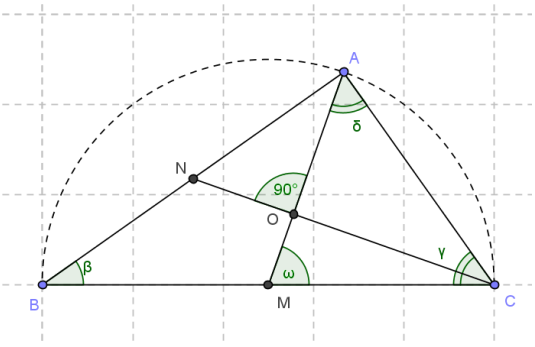
Soluzione

Costruzione della figura

Ricordato che ogni triangolo rettangolo è inscritto nella semicirconferenza avente per diametro l'ipotenusa del triangolo, si seguano i seguenti passi:

1) Si disegni un segmento a piacere che rappresenti l'ipotenusa BC.
2) Si tracci una delle due semicirconferenze di diametro BC; sia essa λ.
3) Si scelga su λ un punto A e lo si unisca con B e C. Il triangolo ABC è rettangolo in A.
4) Sia M il punto medio di BC; si tracci la mediana AM.
5) Sia N il punto medio di AB; si tracci la mediana CN.
6) Sia O il punto di intersezione tra le mediane AM, CN.
7) Far scorrere A su λ e osservare l'ampiezza dell'angolo AON. Quando l'ampiezza dell'angolo sarà 90° la posizione di A sarà quella del vertice dell'angolo retto del triangolo ABC avente la proprietà indicata.

Analisi e risoluzione del problema



1) Osserviamo che i triangoli AMC, AMB sono isosceli rispettivamente sui lati AC, AB.
2) Il punto O di intersezione delle due mediane AM, CN coincide con il baricentro del triangolo ABC, dunque divide ciascuna mediana in due parti delle quali quella contenente il vertice del triangolo è doppia dell'altra, quindi AO≅2OM, CO≅2ON.
3) L'angolo AMC è esterno rispetto al triangolo AMB (isoscele su AB, quindi sono congruenti gli angoli ABM, BAM) e la sua ampiezza è doppia dell'angolo ABM; con ABM=β e AMC=ω si ha $\omega=2\beta$.
4) Poniamo per comodità BC=2r.
5) Dal triangolo rettangolo MOC deduciamo che CO=MC·senω=r·sen(2β), nonché OM= MC·cosω= MC·cos(2β)= r·cos(2β).
6) Dal triangolo rettangolo AON, il cui angolo acuto OAN=β, si deduce che ON=AN·senβ=AB/2·senβ, nonché AO=AN·cosβ=AB/2·cosβ.
7) Imponiamo ora il rispetto delle condizioni AO≅2OM, CO≅2ON.
   a. AO≅2OM $\rightarrow$ AB/2·cosβ=2· MC·cos(2β)= BC·cos(2β), da cui

$$\frac{AB}{BC}=\frac{2\cos(2\beta)}{\cos\beta} \qquad (7.a)$$

b. CO≅2ON $\rightarrow MC \cdot sen(2\beta) = 2AN \cdot sen\beta \rightarrow \frac{BC}{2} sen(2\beta) = ABsen\beta \rightarrow$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{sen(2\beta)}{2sen\beta} = \frac{2sen\beta\cos\beta}{2sen\beta} = \cos\beta \qquad (7.b)$$

Confrontando la (7.a) e la (7.b) otteniamo l'equazione seguente

$\frac{2\cos(2\beta)}{\cos\beta} = \cos\beta$, da cui $2(2\cos^2\beta - 1) = \cos^2\beta \rightarrow 3\cos^2\beta = 2$,quindi, tenendo conto che $0 < \beta < 90°$, $\cos\beta = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

In definitiva, per la (7.b), risulta $\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.