Applicazioni della trigonometria

Nel triangolo rettangolo ABC, rettangolo in A, è noto che tgβ=3/4 e $\overline{AC}=12cm$. CD è la bisettrice dell'angolo al vertice C.

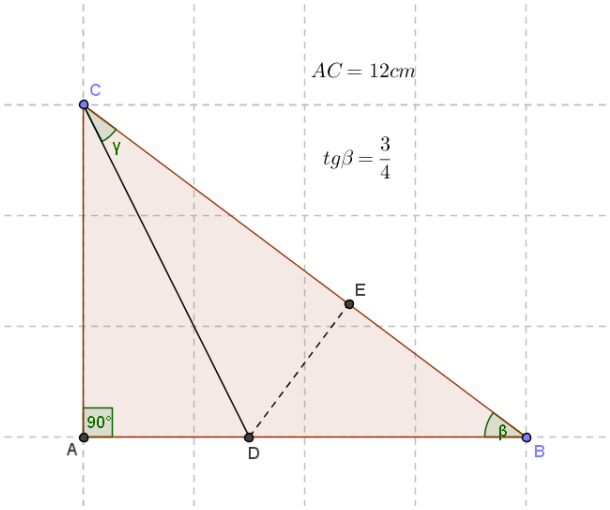
Quesiti

1) Determinare perimetro e area del triangolo ABC.
2) Determinare perimetro ed area del triangolo BCD e la misura dell'altezza relativa al lato BC.
3) Calcolare il seno dell'angolo BDC.

Soluzione

1) Osserviamo che $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=tg\beta$, quindi

$$\overline{AB}=\frac{\overline{AC}}{tg\beta}=12cm\cdot\frac{4}{3}=16cm.$$



La misura dell'ipotenusa BC è

$$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{AB}^2}=\sqrt{12^2+16^2}cm=$$
$$\sqrt{12^2+16^2}cm=20cm$$

Possiamo ora trovare area e perimetro del triangolo ABC.

$$Area(ABC)=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}=$$
$$\frac{1}{2}\cdot16\cdot12cm^2=96cm^2$$

$$2P(ABC)=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=(16+20+12)cm=48cm$$

2) CD è bisettrice dell'angolo ACD=2γ. Risulta $2\gamma=90°-\beta$ ed ancora

$$sen(2\gamma)=sen(90°-\beta)=\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=\frac{4}{5}$$, da cui si deduce che

$$\cos(2\gamma)=\sqrt{1-sen^2(2\gamma)}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}.$$

Dalle formule di bisezione ricaviamo

$\cos\gamma = \sqrt{\frac{1+\cos(2\gamma)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $sen\gamma = \sqrt{\frac{1-\cos(2\gamma)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, quindi

$tg\gamma = \frac{sen(\gamma)}{\cos(\gamma)} = \frac{1}{2}$.

Nel triangolo rettangolo CAD l'angolo ACD ha ampiezza γ e dunque si ha

$\overline{AD} = \overline{AC} \cdot tg\gamma = 12cm \cdot \frac{1}{2} = 6cm$; inoltre

$\overline{CD} = \frac{\overline{AC}}{\cos\gamma} = 12cm \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = 6\sqrt{5}cm$.

Deduciamo ancora che DB=AB-AD$\rightarrow \overline{DB} = 10cm$.

Perimetro del triangolo BCD

$2P(BCD) = \overline{DB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \left(10 + 20 + 6\sqrt{5}\right)cm = 6\left(5 + \sqrt{5}\right)cm$

Calcolo dell'area del triangolo BCD

Considerando il triangolo sulla base BD si osserva che l'altezza relativa è il segmento AC. Abbiamo le misure di entrambi i segmenti, quindi risulta l'area richiesta è

$Area(BDC) = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12cm^2 = 60cm^2$.

Altezza del triangolo BCD relativa al lato BC

Sia DE l'altezza in oggetto. Osserviamo che il punto D appartiene alla bisettrice dell'angolo ACB, dunque è equidistante dai lati AC, BC. Poiché la distanza di D dal lato AC è la misura del segmento AD, già trovata, che vale 6cm, risulta anche $\overline{DE} = 6cm$.

Diversamente.

La misura di DE si può ottenere dal triangolo rettangolo DEB, rettangolo in E.

$\overline{DE} = \overline{DB} \cdot sen\beta$,

e poiché $sen\beta = \frac{tg\beta}{\sqrt{1+tg^2\beta}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$

segue $\overline{DE} = 10cm \cdot \frac{3}{5} = 6cm$.

3) Calcolo di sen(BDC)

Osserviamo che l'angolo BDC è supplementare dell'angolo ADC, quindi i due angoli hanno lo stesso seno; d'altra parte ADC è complementare di ACD=γ, quindi sen(ADC)=cosγ ed in precedenza abbiamo trovato che $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}$.