Triangoli inscritti in una semicirconferenza

Ricerca del triangolo avente perimetro ed area massimi

Problema

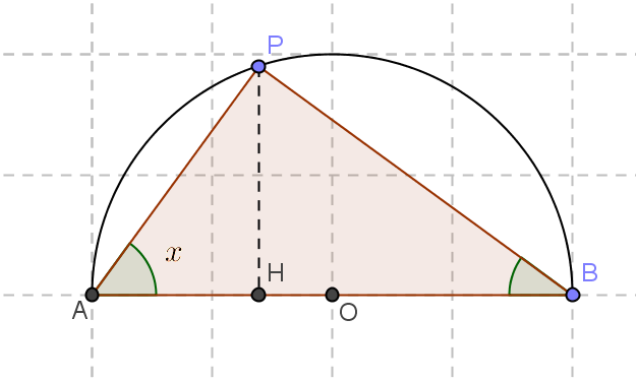
Considerata una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, siano P un qualsiasi punto sull'arco AB e x l'ampiezza dell'angolo BAP.

Quesiti

1) Esprimere in funzione di x e di r la misura del perimetro del triangolo ABP.
2) Determinare per quale valore di x il triangolo ha perimetro massimo, indicandone il corrispondente valore.
3) Riconoscere che il triangolo avente perimetro massimo è anche quello di area massima tra tutti i triangoli inscritti nella semicirconferenza.

Risoluzione

Facciamo riferimento alla figura riportata a margine.



1) Osserviamo che il triangolo ABP è rettangolo in P perché inscritto in una semicirconferenza e risulta:

$$\overline{AP} = \overline{AB} \cdot \cos x = 2r \cdot \cos x,$$

$$\overline{BP} = \overline{AB} \cdot senx = 2r \cdot senx,$$

con $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Il perimetro del triangolo misura

$$Perim(ABP) = \overline{AB} + \overline{AP} + \overline{BP} = 2r\left(1 + \cos x + senx\right)$$

2) Consideriamo la funzione $f(x) = 2r\left(1 + \cos x + senx\right)$, con $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ed osserviamo che è continua e definita in un intervallo chiuso e limitato, dunque per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluti.

Possiamo determinare il valore massimo della funzione scrivendo in modo diverso l'espressione della stessa. Notiamo che per ogni x reale risulta

$$\cos x + senx = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} senx\right) = \sqrt{2}\left(sen\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4} senx\right) = \sqrt{2} \cdot sen\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

e dunque la funzione in esame può assumere la forma seguente:

$$f(x)=2r\left(1+\sqrt{2}\cdot sen\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)$$

Il massimo della funzione si ottiene quando risulta massima la funzione $sen\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ nel dominio $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ e ciò si verifica solo con $x=\frac{\pi}{4}$, avendosi $sen\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. Concludiamo che il valore massimo della funzione è

$$Max=\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2r\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Osservazione

Il triangolo avente perimetro massimo è rettangolo isoscele:AP≅BP.

3) Triangolo di area massima inscritto nella semicirconferenza.

Al variare del punto P sull'arco della semicirconferenza, consideriamo l'altezza del triangolo ABP relativa alla base AB. Evidentemente l'area del triangolo è $S(x)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{HP}$. Poiché la misura della base è fissa, il valore dell'area sarà massimo quando sarà massima l'altezza $\overline{HP}$ e ciò si verifica quando il segmento HP diventa il raggio OP, con O centro della circonferenza cui appartiene la semicirconferenza. Dunque il triangolo avente area massima è il triangolo rettangolo isoscele APB ed ha area $S_{Max}=\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot r=r^2$.

Per quanto visto prima, il triangolo rettangolo isoscele ABP inscritto nella semicirconferenza, oltre ad avere il perimetro massimo è anche quello di area massima fra tutti i triangoli inscritti nella semicirconferenza.