Applicazione del Teorema di Carnot

Massimo di un funzione goniometrica

Problema

Considerata una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, sia P un suo punto sull'arco. Si costruisca il quadrato ABCD giacente nel semipiano opposto a quello contenente la semicirconferenza, con i punti A, B, C, D disposti nel verso orario. Indicata con α l'ampiezza dell'angolo BAP, determinare per quale valore di α la funzione $f(\alpha) = 2\overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$ assume il valore massimo.

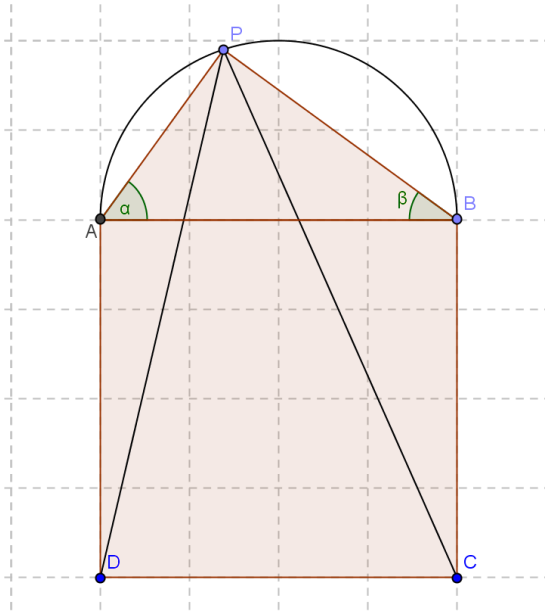
Risoluzione

Strategia risolutiva

Il triangolo ABP è rettangolo in P perché inscritto in una semicirconferenza. Si possono determinare le misure dei cateti AP, BP in funzione dell'angolo α e della misura del raggio della semicirconferenza. Ciò fatto, si osservi che applicando il teorema del coseno (detto di Carnot) ai triangoli APD, BPC si possono determinare in funzione di α e del raggio r le misure $\overline{PC}^2$, $\overline{PD}^2$ e quindi l'espressione goniometrica della funzione. Utilizzando opportunamente le formule goniometriche si elabora l'espressione della funzione per ottenere una forma che consente di determinare il suo valore massimo.

Elaborazioni

Dal triangolo rettangolo ABP ricaviamo:
$\overline{AP} = \overline{AB}\cos\alpha = 2r\cdot\cos\alpha$; $\overline{BP} = \overline{AB}sen\alpha = 2r\cdot sen\alpha$.



Applicando il Teorema del coseno al triangolo APD si ha:

$$\overline{PD}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AP}\cdot\overline{AD}\cdot\cos(90°+\alpha) =$$

$$(2r\cdot\cos\alpha)^2 + 4r^2 - 8r^2\cdot\cos\alpha\cdot(-sen\alpha) =$$
$$4r^2\cdot(\cos^2\alpha + 1 + 2sen\alpha\cdot\cos\alpha)$$

Applicando ancora lo stesso teorema al triangolo BPC otteniamo

$$\overline{PC}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{BP}\cdot\overline{BC}\cdot\cos(90°+\beta) =$$
$$(2r\cdot sen\alpha)^2 + 4r^2 - 8r^2\cdot sen\alpha\cdot(-sen\beta) =$$
$$4r^2\cdot(sen^2\alpha + 1 + 2sen\alpha\cdot sen\beta)$$

e poiché β è complementare di α, quindi risulta $sen\beta = \cos\alpha$, l'espressione diventa

$$\overline{PC}^2 = 4r^2\cdot(sen^2\alpha + 1 + 2sen\alpha\cdot\cos\alpha)$$

Espressione della funzione $f(\alpha)$

$$f(\alpha)=2\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=8r^2\cdot\left(sen^2\alpha+1+2sen\alpha\cdot\cos\alpha\right)+4r^2\cdot\left(\cos^2\alpha+1+2sen\alpha\cdot\cos\alpha\right)=$$

$$4r^2\left(2sen^2\alpha+6sen\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha+3\right)$$

Ricordiamo che sussistono le relazioni

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos(2\alpha)}{2},\qquad sen^2\alpha=\frac{1-\cos(2\alpha)}{2},\qquad 2sen\alpha\cdot\cos\alpha=sen(2\alpha)$$

e quindi la funzione può essere scritta come segue

$$f(\alpha)=4r^2\left(1-\cos(2\alpha)+3sen(2\alpha)+\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}+3\right)=2r^2\left(6sen(2\alpha)-\cos(2\alpha)+9\right)$$

Variabilità di α

Al variare del punto P sull'arco della semicirconferenza l'ampiezza α varia nell'intervallo [0;90°].

Elaborazione ulteriore dell'espressione della funzione

Osserviamo che

$$6sen(2\alpha)-\cos(2\alpha)=\sqrt{37}\left(\frac{6sen(2\alpha)}{\sqrt{37}}-\frac{\cos(2\alpha)}{\sqrt{37}}\right)$$

e possiamo considerare l'angolo acuto φ tale che

$\cos\varphi=\frac{6}{\sqrt{37}}$, per il quale risulta $sen\varphi=\frac{1}{\sqrt{37}}$, quindi $\varphi=arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{37}}\right)\approx 9°27'44"$.

Con l'introduzione del nuovo angolo possiamo scrivere la precedente espressione come segue

$$\sqrt{37}\left(\frac{6sen(2\alpha)}{\sqrt{37}}-\frac{\cos(2\alpha)}{\sqrt{37}}\right)=\sqrt{37}\left(sen(2\alpha)\cdot\cos\varphi-\cos(2\alpha)\cdot sen\varphi\right)=\sqrt{37}\cdot sen(2\alpha-\varphi)$$

Espressione finale della funzione

$$f(\alpha)=2r^2\left(6sen(2\alpha)-\cos(2\alpha)+9\right)=2r^2\left(\sqrt{37}\cdot sen(2\alpha-\varphi)+9\right)$$

Valore massimo della funzione

Il valore massimo è assunto dalla funzione quando

$2\alpha-\varphi=90°$, cioè $\alpha=\frac{90°+\varphi}{2}\approx 49°43'52"$,

perché per detto valore risulta $sen(2\alpha-\varphi)$=1.

Facciamo notare che e il valore indicato per α appartiene al dominio di variabilità [0;90°].

Concludiamo che il valore massimo della funzione è $Max = 2r^2\left(\sqrt{37}+9\right)$.

Osservazione

Nel dominio di variabilità di α non esistono altri valori dell'angolo per i quali la funzione assuma ancora il valore massimo; infatti, il successivo valore di α per il quale la funzione assume il suddetto valore massimo si ha quando

$2\alpha-\varphi = 90°+360°$, cioè $\alpha = \frac{90°+\varphi}{2}+180°$, che evidentemente non appartiene al dominio di variabilità.