Applicazione del Teorema di Carnot

Massimo di un funzione goniometrica

Problema

Considerata una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, sia P un suo punto sull'arco. Si costruisca il quadrato ABCD giacente nel semipiano opposto a quello contenente la semicirconferenza, con i punti A, B, C, D disposti nel verso orario. Indicata con α l'ampiezza dell'angolo BAP, determinare per quale valore di α la funzione $f(\alpha) = 2\overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$ assume il valore massimo.

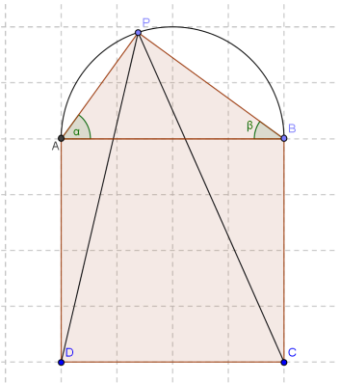
Risoluzione

Strategia risolutiva

Il triangolo ABP è rettangolo in P perché inscritto in una semicirconferenza. Si possono determinare le misure dei cateti AP, BP in funzione dell'angolo α e della misura del raggio della semicirconferenza. Ciò fatto, si osservi che applicando il teorema del coseno (detto di Carnot) ai triangoli APD, BPC si possono determinare in funzione di α e del raggio r le misure $\overline{PC}^2$, $\overline{PD}^2$ e quindi l'espressione goniometrica della funzione. Utilizzando opportunamente le formule goniometriche si elabora l'espressione della funzione per ottenere una forma che consente di determinare il suo valore massimo.

Elaborazioni

Dal triangolo rettangolo ABP ricaviamo:



$\overline{AP} = \overline{AB}\cos\alpha = 2r \cdot \cos\alpha$; $\overline{BP} = \overline{AB}sen\alpha = 2r \cdot sen\alpha$.

…

Espressione della funzione $f(\alpha)$

$$f(\alpha) = 4r^2\left(2sen^2\alpha + 6sen\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha + 3\right)$$

…

Variabilità di α…

Elaborazione ulteriore dell'espressione della funzione…

$$f(\alpha) = 2r^2\left(\sqrt{37} \cdot sen(2\alpha - \varphi) + 9\right)$$

$$Max = 2r^2\left(\sqrt{37} + 9\right).$$