Circonferenze mutuamente tangenti

Calcolo di aree di triangoli con applicazione della trigonometria

Problema

Nel riferimento cartesiano *x*Oy risolvere i seguenti quesiti.

1) Dimostrare che i punti A(4;6), B(13;0), insieme all'origine O(0;0), sono i vertici di un triangolo rettangolo di cui si chiedono le misure dei lati ed il perimetro.
2) Determinare le equazioni delle circonferenze λ_O , λ_A , λ_B , aventi rispettivamente centro in O, A, B e mutuamente tangenti.
3) Rappresentare il triangolo OAB e le tre circonferenze.
4) Detti C, D, E i punti di contatto fra le tre circonferenze, con C su OA, D su AB ed E su OB, calcolare con un metodo a scelta le aree dei quattro triangoli ACD, BDE, OEC, CDE

Soluzione

1) Possiamo dimostrare che il triangolo OAB è rettangolo in A facendo vedere che i coefficienti angolari delle rette dei lati OA, AB sono antireciproci.

   Infatti, $m(OA)=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$; $m(AB)=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{6-0}{4-13}=-\frac{2}{3}$ C.V.D.

   Misure dei lati

   $$\overline{OA}=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}\,;\ \overline{AB}=\sqrt{(13-4)^2+6^2}=\sqrt{81+36}=3\sqrt{13}\,;\ \overline{OB}=13$$

   Misura del perimetro: $2p=13+5\sqrt{13}$

2) Indicati con r_O , r_A , r_B , rispettivamente le misure dei raggi delle circonferenze λ_O , λ_A , λ_B , notiamo che sussistono le seguenti uguaglianze:

   $$r_O+r_A=\overline{OA}=2\sqrt{13}\,;\ r_O+r_B=\overline{OB}=13\,;\qquad r_A+r_B=\overline{AB}=3\sqrt{13}$$

   Risolvendo il sistema formato con le tre suddette equazioni si ricavano i seguenti valori per i raggi:

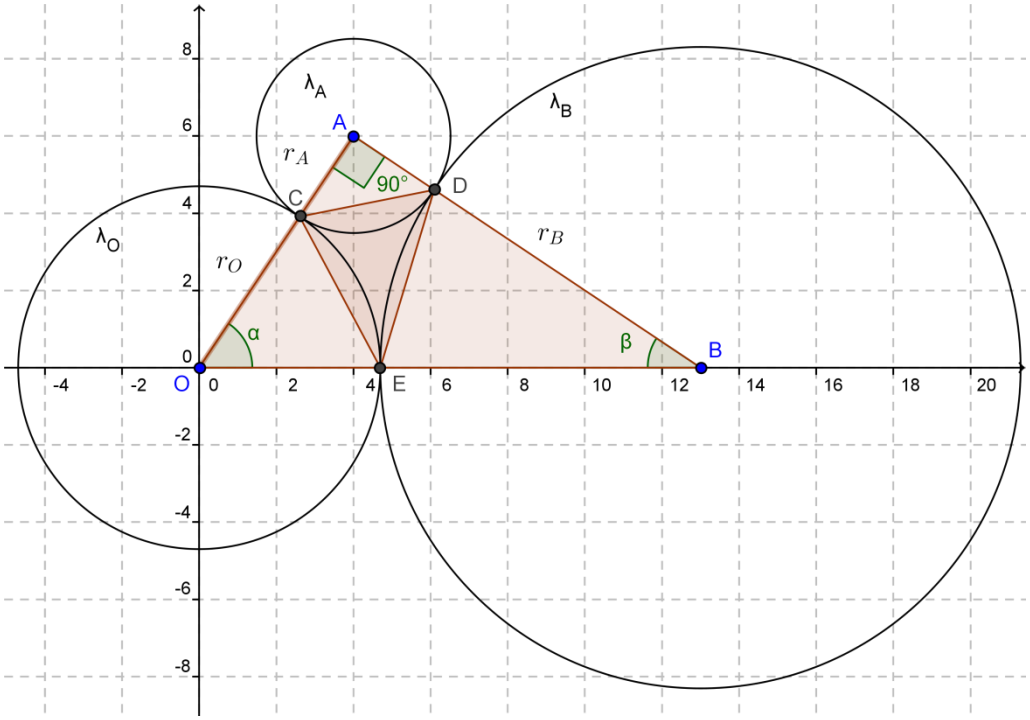
   $$r_O=\frac{13-\sqrt{13}}{2},\qquad r_A=\frac{5\sqrt{13}-13}{2},\qquad r_B=\frac{13+\sqrt{13}}{2}$$

   Possiamo ora scrivere le equazioni delle tre circonferenze richieste

$$\lambda_O : x^2 + y^2 = \left(\frac{13-\sqrt{13}}{2}\right)^2; \quad \lambda_A : (x-4)^2 + (y-6)^2 = \left(\frac{5\sqrt{13}-13}{2}\right)^2;$$

$$\lambda_B : (x-13)^2 + y^2 = \left(\frac{13+\sqrt{13}}{2}\right)^2$$

3) Di seguito è riportata la figura con gli elementi geometrici richiesti, compresi quelli che saranno elaborati nel successivo punto.



4) I triangoli OEC, ACD, BDE sono isosceli; in particolare ACD è rettangolo isoscele.

L'area del triangolo ACD è: $S_1 = \frac{1}{2} r_A^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{5\sqrt{13}-13}{2}\right)^2 = \frac{13\left(19-5\sqrt{13}\right)}{4} \approx 3{,}160$

Area del triangolo OEC

Indicato con α l'angolo formato dal cateto OA con il semiasse positivo delle ascisse, risulta $tg\alpha = \frac{3}{2}$. Per l'area si ha

$$S_2 = \frac{1}{2} r_O^2 sen\alpha = \frac{1}{2} r_O^2 \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{2}\left(\frac{13-\sqrt{13}}{2}\right)^2 \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{3}{4}\left(7\sqrt{13}-13\right) \approx 9{,}179$$

Area del triangolo BDE

Indicato con β l'angolo nel vertice B, dal significato del coefficiente angolare della retta AB deduciamo che $tg\beta = \frac{2}{3}$ e quindi l'area del triangolo è

$$S_3 = \frac{1}{2} r_B^2 sen\beta = \frac{1}{2} r_B^2 \frac{tg\beta}{\sqrt{1+tg^2\beta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{13+\sqrt{13}}{2}\right)^2 \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{13+7\sqrt{13}}{2} \approx 19{,}119$$

Area del triangolo CDE

L'area del triangolo si può ottenere per differenza tra l'area del triangolo OAB e la somma delle aree dei triangoli OEC, ACD, BDE.

$$Area(OAB) = S = 13 \cdot 6 : 2 = 39$$

$$Area(CDE) = S - (S_1 + S_2 + S_3) \approx 39 - (3{,}160 + 9{,}179 + 19{,}119) = 7{,}542$$