

## Sistema di due equazioni goniometriche<sup>(1)</sup>

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(x+y) = \operatorname{tg} x \\ \operatorname{sen} x - \cos y = 0 \end{cases}$$

Trovare le soluzioni del sistema e rappresentarle nel piano cartesiano.

### Soluzione

#### Prima equazione del sistema

$$\operatorname{tg} x + y = \operatorname{tg} x \rightarrow x + y = x + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge \left( x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right), \text{ quindi}$$

$$y = k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge \left( x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$$

L'equazione è soddisfatta dalle coppie di numeri reali  $(x;y)$  nelle quali  $x$  può assumere qualsiasi valore diverso da  $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , mentre  $y$  deve essere uguale a  $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Sia  $S_1$  l'insieme delle soluzioni trovate.

#### Seconda equazione

$$\operatorname{sen} x - \cos y = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - y \right) \rightarrow \left( x = \frac{\pi}{2} - y + 2h\pi \right) \vee \left( x = \pi - \frac{\pi}{2} + y + 2h\pi \right), h \in \mathbb{Z}$$

L'insieme delle soluzioni della seconda equazione è costituito da tutte le coppie ordinate  $(x;y)$  di numeri reali che individuano i punti del piano cartesiano appartenenti alle singole rette aventi equazioni:

$$y = -x + \frac{\pi}{2} + 2h\pi, h \in \mathbb{Z}, \quad y = x - \frac{\pi}{2} + 2h\pi, h \in \mathbb{Z}.$$

Si tratta di due insiemi di rette: il primo è composto da rette parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante, il secondo da rette parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Indichiamo con  $S_2$  l'insieme delle soluzioni dell'equazione.

#### Insieme delle soluzioni del sistema

L'insieme delle soluzioni del sistema di equazioni è costituito dalle coppie ordinate  $(x;y)$  di numeri reali che appartengono ad entrambi gli insiemi di soluzioni delle due equazioni, dunque:

$$S = S_1 \cap S_2.$$

#### Esistono soluzioni del sistema? Proveremo che la risposta è negativa.

Osserviamo che:

1) per le coppie  $(x;y)$  per le quali si verificano le due condizioni

$$y = k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ (affinché sia soddisfatta la prima equazione);}$$

$y = -x + \frac{\pi}{2} + 2h\pi, h \in \mathbb{Z}$  (questa è una delle due possibilità che si hanno, dovendo essere soddisfatta la seconda equazione), sostituendo nella  $y$  della seconda il valore dato dalla  $y$  della prima si ottiene per la variabile  $x$  l'espressione

$$x = -y + \frac{\pi}{2} + 2h\pi = \frac{\pi}{2} + k + 2h\pi, \text{ con } h, k \in \mathbb{Z},$$

**e questi valori non si possono accettare** per la condizione imposta dall'esistenza della funzione  $\operatorname{tg} x$ ;

2) considerando le coppie  $(x;y)$  per le quali si verificano entrambe le condizioni

$$y = k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ (affinché sia soddisfatta la prima equazione);}$$

---

<sup>(1)</sup> Esercizio proposto nel compito in classe M3\_4I\_28-02-11

$y = x - \frac{\pi}{2} + 2h\pi, h \in \mathbb{Z}$  (seconda possibilità offerta dalla seconda equazione del sistema),

sostituendo ancora nella  $y$  della seconda il valore indicato nella prima si perviene ai seguenti valori per la variabile  $x$

$$x = -y - \frac{\pi}{2} + 2h\pi = -k\pi - \frac{\pi}{2} + 2h\pi = -\frac{\pi}{2} + 2h - k\pi, \text{ con } h, k \in \mathbb{Z}$$

ed anche questi valori non sono accettabili, sempre affinché esista la funzione  $\text{tg}x$ .

**Concludiamo che il sistema di equazioni esaminato non ammette soluzioni.**

### Un aiuto dalla grafica

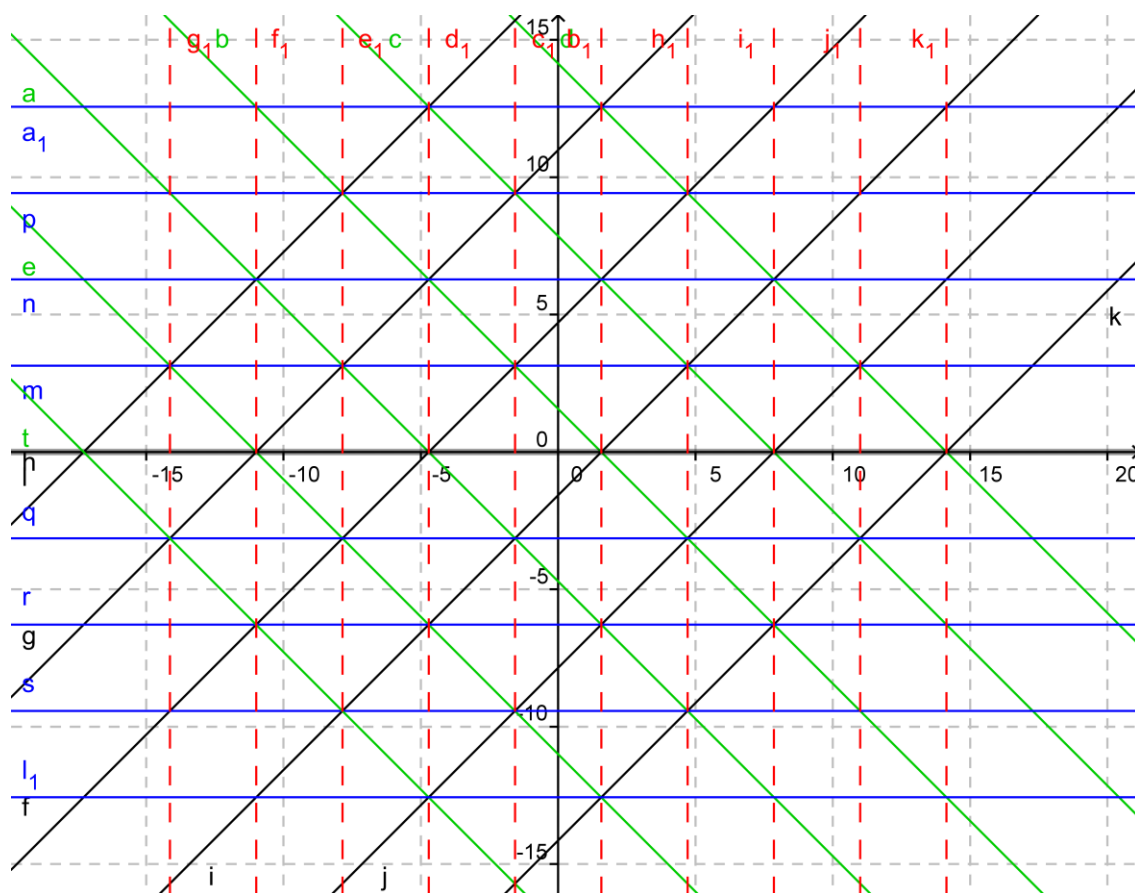
Riportiamo di seguito un grafico accurato nel quale si possono tenere sott'occhio alcune delle rette dei diversi insiemi di soluzioni discussi, nonché alcune rette che contengono punti  $(x; y)$  che non appartengono al dominio di definizione del sistema di equazioni in esame.

Nel piano cartesiano abbiamo riportato con tratteggio ed in colore rosso le rette i cui punti  $(x; y)$  non garantiscono l'esistenza della funzione  $\text{tg}x$ .

Si riscontra che per ciascuno dei punti di intersezione tra una retta avente equazione del tipo

$y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$  con una retta avente equazione del tipo  $y = -x + \frac{\pi}{2} + 2h\pi, h \in \mathbb{Z}$  o del tipo

$y = x + \frac{\pi}{2} + 2h\pi, h \in \mathbb{Z}$ , passa comunque una retta avente equazione  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  e perciò il punto deve essere escluso.



**Figura 1-I punti delle rette tratteggiate in rosso non fanno parte del dominio di definizione del sistema di equazioni**