

Goniometria

Risoluzione di un sistema di due equazioni goniometriche

Esercizi¹

a) Risolvere il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos y - \operatorname{sen}^2 x = 1 \\ 2\operatorname{sen} x + 4\cos^2\left(\frac{y}{2}\right) = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Soluzione

Si elaborano le equazioni ottenendo

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos y - \operatorname{sen}^2 x = 1 \\ \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{sen} x \end{cases} \quad \text{che diventa} \quad \begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot (\operatorname{sen} x + \sqrt{2}) = 0 \\ \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{sen} x \end{cases}$$

Il sistema è equivalente all'unione dei due seguenti:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{sen} x \end{cases}, \quad \begin{cases} \operatorname{sen} x = -\sqrt{2} \\ \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{sen} x \end{cases}$$

Il secondo sistema non ha soluzioni perché la prima equazione è evidentemente impossibile. Le soluzioni del sistema in esame sono, dunque, solo quelle fornite dal primo sistema.

Ebbene, notiamo che risulta:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{sen} x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases},$$

quindi l'insieme delle soluzioni del sistema è costituito dalle coppie ordinate (x;y) aventi le

$$\text{seguenti caratteristiche} \quad \begin{cases} x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \left(y = \frac{\pi}{4} + 2h\pi \right) \vee \left(y = -\frac{\pi}{4} + 2h\pi \right), h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

* * * * *

b) In relazione alle soluzioni del sistema del precedente punto, interpretando i valori delle soluzioni (x;y) come le coordinate cartesiane di un punto, rappresentare alcune soluzioni nel piano cartesiano e precisare quali di esse appartengono ai primi due quadranti e sono interne alla parabola $\gamma: y = -\frac{1}{2\pi}x^2 + 2\pi$.

¹ Esercizi assegnati nel compito in classe M4-3D-240206

Nella figura a lato sono rappresentati i punti relativi ad alcune soluzioni. I punti corrispondenti alle soluzioni interni alla parabola γ ed appartenenti ai primi due quadranti sono in numero di quattro e le loro coordinate sono:

$$\left(-\pi; \frac{\pi}{4}\right); \left(0; \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\left(\pi; \frac{\pi}{4}\right); \left(0; \frac{7\pi}{4}\right).$$

