

FUNZIONI PERIODICHE

Es_2)⁽¹⁾ Rappresentare la funzione $f(x) = \tan(2x)$, limitatamente ad un intervallo $[a; b]$ di ampiezza pari ad un periodo della funzione, scegliendo autonomamente l'intervallo.

Soluzione

La funzione è periodica con periodo $T = \frac{\pi}{2}$.

In figura è rappresentato il diagramma della funzione limitatamente all'intervallo $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

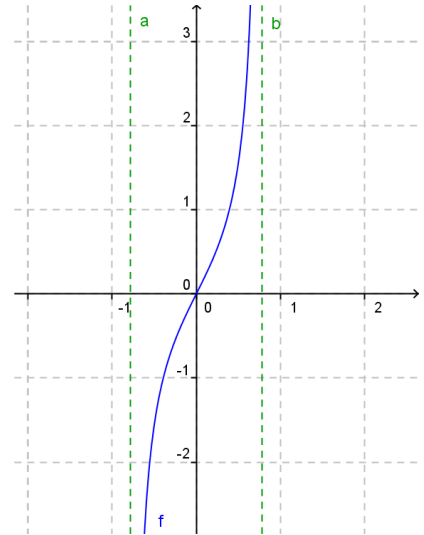
Operatività con GeoGebra

Per ottenere il diagramma con GeoGebra è stato sfruttato il comando

Curva[t,tan(2t),t,-Pi/4,Pi/4]

Inoltre, sono state rappresentate le rette con i comandi asintoti

verticali $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$, rispettivamente con i comandi: $x = -\pi/4$, $x = \pi/4$



* * * * *

Es_3)⁽²⁾ Sul periodo delle funzioni goniometriche

3.1 Determinare il periodo di ciascuna delle seguenti funzioni goniometriche.

a) $f(x) = \sin\left(\frac{3}{2}x\right) + 2\lg\left(\frac{2}{3}x\right) - 4\cos\left(\frac{5}{6}x\right)$

b) $f(x) = \frac{1 - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x}$

c) $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{cosec}(2x)$.

3.2 Precisare per ciascuna funzione se sussistono nel relativo dominio di definizione le uguaglianze $f(-x) = f(x)$, $f(-x) = -f(x)$

Soluzione

a) La funzione risulta essere la somma di tre funzioni periodiche e pertanto sarà periodica. Per i periodi delle singole funzioni risulta:

$$f_1(x) = \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \quad \text{ha periodo} \quad T_1 = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3};$$

$$f_2(x) = 2\lg\left(\frac{2}{3}x\right) \quad \text{ha periodo} \quad T_2 = \frac{\pi}{\frac{2}{3}} = \frac{3\pi}{2};$$

¹ Esercizio assegnato nel compito in classe M3_4I-161210

² Esercizio assegnato nel compito in classe M3_4I-161210

$$f_3(x) = -4 \cos\left(\frac{5}{6}x\right) \text{ ha periodo } T_3 = \frac{2\pi}{\frac{5}{6}} = \frac{12\pi}{5}.$$

Poiché possiamo scrivere

$$T_1 = 40 \cdot \frac{\pi}{30}, \quad T_2 = 45 \cdot \frac{\pi}{30}, \quad T_3 = 72 \cdot \frac{\pi}{30},$$

ed il m.c.m. tra 40, 45, e 72 è 360, segue che il periodo della funzione somma è

$$T = 360 \cdot \frac{\pi}{30} = 12\pi.$$

Osserviamo che in ciascuno intervallo del tipo $[a; a+12\pi]$, con $a \in \mathbb{R}$:

$$\text{la funzione } f_1(x) \text{ si ripete } n_1 = 12\pi : \frac{4\pi}{3} = 9 \text{ volte;}$$

$$\text{la funzione } f_2(x) \text{ si ripete } n_2 = 12\pi : \frac{3\pi}{2} = 8 \text{ volte;}$$

$$\text{la funzione } f_3(x) \text{ si ripete } n_3 = 12\pi : \frac{12\pi}{5} = 5.$$

b) Osserviamo che possiamo scrivere

$$f(x) = \frac{1 - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x} = \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x} = \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right), \text{ con la}$$

condizione di equivalenza $\frac{x}{2} \neq k\pi$, cioè $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

La funzione ottenuta ha periodo $T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$.

c) Poiché

$$f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{cosec}(2x) = -\sin(2x) - \frac{1}{\sin(2x)}$$

Il periodo della funzione è $T = \pi$

3.2 Precisare per ciascuna funzione se sussistono nel relativo dominio di definizione le uguaglianze

$$f(-x) = f(x), \quad f(-x) = -f(x)$$

Risposte

L'uguaglianza $f(-x) = f(x)$ non è verificata da alcuna delle tre funzioni in oggetto.

L'uguaglianza $f(-x) = -f(x)$ è verificata per le funzioni riportate nei due casi b) e c); pertanto dette funzioni sono dispari.