

FUNZIONI GONIOMETRICHE

Es_1)¹ In relazione alla funzione $f(x) = \sqrt{3} \cos x + 3 \operatorname{sen} x$ risolvere i quesiti che seguono.

1.1 Scriverla in una forma del tipo $f(x) = h \cos(x \pm \varphi)$, oppure $f(x) = k \operatorname{sen}(x \pm \varphi)$.

1.2 Rappresentare il diagramma della funzione limitatamente ai valori del dominio $[0; 2\pi]$.

1.3 Risolvere l'equazione $f(x) = 3$, determinandone tutte le soluzioni con $x \in \mathbb{R}$ ed indicando quelle principali.

1.4 Calcolare $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Soluzione

1.1 Per trasformare l'espressione della funzione in una delle forme richieste si procede moltiplicando e dividendo i due termini per

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ ottenendo}$$

$$f(x) = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cos x + \frac{3}{2\sqrt{3}} \operatorname{sen} x \right) =$$

$$2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x \right)$$

e si può osservare che

$$\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x = \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right), \text{ per cui si può scrivere}$$

$$f(x) = 2\sqrt{3} \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$$

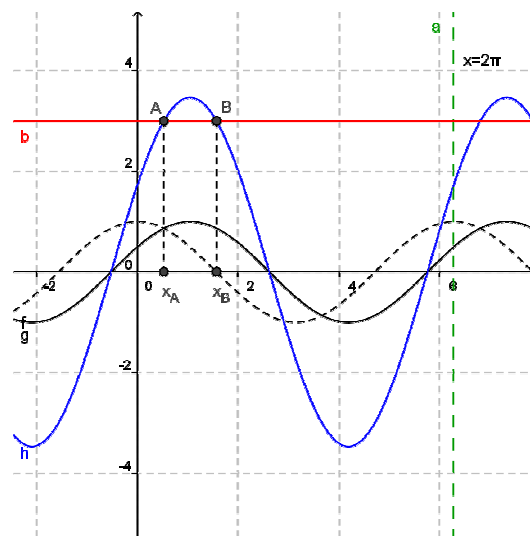
1.2 In figura sono riportati i diagrammi delle funzioni:

$y = \cos x$ in colore nero e con stile tratteggiato;

$y = \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$ in colore nero e con tratto continuo;

$y = 2\sqrt{3} \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$ in colore blu.

Per aiutare il lettore alla lettura del grafico abbiamo rappresentato anche la retta a di equazione $x=2\pi$, con stile tratteggio.



1.3 L'equazione $f(x) = 3$, dopo la trasformazione indicata nel precedente punto 1.1, diventa

$2\sqrt{3} \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 3$, quindi $\cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Le soluzioni di quest'equazione si determinano sfruttando le due relazioni

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Dalla prima si ricavano come soluzioni gli angoli $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; dalla seconda gli angoli

¹ Esercizio assegnato nel compito in classe M3_4I-161210

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. L'insieme delle soluzioni dell'equazione in oggetto è perciò:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \left| \left(x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) \vee \left(x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z} \right. \right\}$$

Nell'insieme S esistono solo due valori che appartengono all'intervallo $[0; 2\pi[$ e che pertanto sono principali.

Nella figura riportata sopra i due valori principali sono le ascisse dei due punti A e B.

1.3 Calcolo di $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Per il calcolo del valore richiesto è opportuno utilizzare l'espressione iniziale della funzione, piuttosto che quella determinata nel precedente punto 1.1, e ciò per evitare inutili calcoli.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{2}$$