

Goniometria

Risoluzione di due equazioni in $\sin x$ e $\cos x$

Esercizi¹

- a) Risolvere l'equazione goniometrica che segue e determinare le soluzioni principali
- $$4\cos^2 x + 2(2\sin x - \cos x)^2 = 11$$

Soluzione

L'equazione si può ridurre alla forma normale trasformandola in un'equazione omogenea di secondo grado in $\sin x$ e $\cos x$. La forma semplificata è:

$$3\sin^2 x + 8\sin x \cos x + 5\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 3\tg^2 x + 8\tg x + 5 = 0 \text{ che risolta fornisce :}$$

$$\tg x = -\frac{5}{3}, \text{ soddisfatta per } x = \arctg\left(-\frac{5}{3}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ oppure}$$

$$\tg x = -1, \text{ soddisfatta dai valori } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Le soluzioni principali sono

$$\left\{ \arctg\left(-\frac{5}{3}\right) + \pi, \arctg\left(-\frac{5}{3}\right) + 2\pi, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

* * * * *

- b) Risolvere l'equazione: $\sin(2x) + 2\sin^2 x = \cos x + \sin x$

Soluzione

Applicando la formula di duplicazione per la funzione seno e raccogliendo parzialmente i fattori comuni si ricava

$$2\sin x \cos x + 2\sin^2 x = \cos x + \sin x; (2\sin x - 1)(\cos x + \sin x) = 0$$

L'insieme delle soluzioni è dato dall'unione degli insiemi delle soluzioni delle due seguenti equazioni

$$\text{b.1) } 2\sin x - 1 = 0, \text{ che è soddisfatta per } \left(x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) \vee \left(x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{b.2) } \cos x + \sin x = 0, \text{ soddisfatta dai valori } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

* * * * *

¹ Esercizi assegnati nel compito in classe M4-3D-240206