

Equazioni e disequazioni goniometriche⁽¹⁾

a) $2\operatorname{sen}(3x - 60^\circ) = \sqrt{3}$

L'equazione goniometrica si risolve rapidamente tenendo conto delle proprietà della funzione elementare $\operatorname{sen}x$. Infatti, si ha:

$$2\operatorname{sen}(3x - 60^\circ) = \sqrt{3} \rightarrow \operatorname{sen}(3x - 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'equazione ottenuta è soddisfatta dai valori x degli angoli che verificano una delle due seguenti uguaglianze:

(*) $3x - 60^\circ = 60^\circ + k360^\circ$, da cui $x = 40^\circ + k120^\circ, k \in \mathbb{Z}$;

(**) $3x - 60^\circ = 120^\circ + k360^\circ$, da cui $x = 60^\circ + k120^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione goniometrica è:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid (x = 40^\circ + k120^\circ) \vee (x = 60^\circ + k120^\circ), k \in \mathbb{Z}\}$$

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}x$

Sfruttando la relazione goniometrica $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ per gli angoli associati $\alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha$, possiamo trasformare l'equazione riconducendola all'uguaglianza di due funzioni seno:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}x \rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \operatorname{sen}x \rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \operatorname{sen}x$$

L'equazione ottenuta è soddisfatta dagli angoli x che verificano una delle due seguenti uguaglianze:

(*) $\frac{\pi}{4} - x = x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(**) $\frac{\pi}{4} - x = \pi - x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

La (*) è soddisfatta dai valori $x = \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, mentre la (**) non ammette alcuna soluzione. Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione è:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left(x = \frac{\pi}{8} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$$

c) $\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen}x \cos x + \cos^2 x = 2$

Ricordata la relazione fondamentale $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, si riconosce che l'equazione si può trasformare riducendola come indicato:

$$\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen}x \cos x + \cos^2 x = 2 \rightarrow 2\operatorname{sen}x \cos x = 1 \rightarrow \operatorname{sen}(2x) = 1$$

L'equazione ottenuta è soddisfatta solo dai valori $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione di partenza è:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

d) $\frac{\operatorname{tg}x - 1}{2\cos x + 1} \geq 0$

⁽¹⁾ Esercizi assegnati nella prova di saldo debiti formativi nella Classe 4I-Liceo Sc. il 25-08-2011

Limitatamente al primo giro l'insieme delle soluzioni è: $S = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{4} \right] \cup \left] \frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2} \right[$

e) $\text{sen}^2 x - \text{sen} x < 0$

Scrivendo la disequazione con il primo membro fattorizzato

$$\text{sen}^2 x - \text{sen} x < 0 \rightarrow \text{sen} x (\text{sen} x - 1) < 0,$$

e riconosciuto che

$\text{sen} x - 1 < 0$ è soddisfatta $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, deduciamo che i valori che verificano la

disequazione sono quelli per i quali risulta $\text{sen} x > 0$ e tali che $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Poiché

limitatamente al primo giro $\text{sen} x > 0$ per $0 < x < \pi$, si conclude che l'insieme delle soluzioni della disequazione è:

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(]k\pi; (1+2k)\pi[- \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \right)$$

Logaritmi ed esponenziali

a) $\log_2 x + \log_2 (x-2) = 2$

L'equazione ha senso per $x > 2$. Applicando le proprietà dei logaritmi l'equazione si trasforma come segue:

$$\log_2 x + \log_2 (x-2) = 2 \rightarrow \log_2 (x(x-2)) = 2 \rightarrow x(x-2) = 2^2 \rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$$

L'equazione ottenuta ammette come radici i valori $x_1 = 1 - \sqrt{5} < 2$, $x_2 = 1 + \sqrt{5} > 2$ e quindi solo x_2 è soluzione dell'equazione logaritmica di partenza.

b) $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$

L'equazione si trasforma riconducendola ad un'equazione ausiliaria di secondo grado.

$$3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0 \rightarrow 3 \cdot (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 1 = 0. \text{ Ponendo } 3^x = t \text{ l'equazione ausiliaria è:}$$

$$3t^2 - 4t + 1 = 0$$

che ammette come radici $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, dalle quali, ritornando all'incognita x , si ha

$$t_1 = 1 \rightarrow 3^x = 1 \rightarrow x_1 = 0;$$

$$t_2 = 3 \rightarrow 3^x = 3 \rightarrow x_1 = 1$$

Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione esponenziale è $S = \{0; 1\}$

c) $\log(1-x) < -1$

La disequazione ha senso per i valori della variabile x che rendono positivo l'argomento della funzione logaritmica; considerato che quest'ultima ha la base maggiore di uno, la disequazione assegnata è equivalente alla doppia disuguaglianza

$$0 < 1-x < e^{-1} \quad \text{e quindi al sistema di disequazioni} \quad \begin{cases} 1-x > 0 \\ 1-x < e^{-1} \end{cases}$$

che ammette come insieme di soluzioni $S =]1-e^{-1}; 1[$.

d) $2^{2x+1} > 4^{-x}$

La disequazione si può trasformare velocemente riconducendola alla disuguaglianza tra due potenze aventi la stessa base.

$$2^{2x+1} > 4^{-x} \rightarrow 2^{2x+1} > (2^2)^{-x} \rightarrow 2^{2x+1} > 2^{-2x}$$

Poiché la base delle potenze è maggiore di uno la disuguaglianza ottenuta è equivalente alla disuguaglianza diretta tra gli esponenti delle stesse. Pertanto la disequazione si riduce alla seguente

$$2x+1 > -2x$$

che è soddisfatta per i valori reali $x > -\frac{1}{4}$. Concludiamo che l'insieme della soluzione è

$$\text{l'intervallo } S = \left] -\frac{1}{4}; +\infty \right[.$$

Risposte: a) $S = \{1 + \sqrt{5}\}$

b) $S = \{-1; 1\}$

c) $S =]1-e^{-1}; 1[$

d) $x > -\frac{1}{4}$