

Disequazioni goniometriche¹

Es_1) Risolvere le disequazioni goniometriche che seguono.

1.1 $2\sin^2 x - 1 \leq 0$, da risolvere su tutto l'asse reale.

1.2 $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < \sqrt{3}$ determinare le soluzioni su tutto l'asse reale e rappresentare sulla

circonferenza goniometrica, oppure nel piano cartesiano sfruttando il diagramma della funzione $\operatorname{tg}x$, quelle ricadenti nel primo giro: $[0; 2\pi]$.

1.3 $2\cos(3x - 15^\circ) \geq \sqrt{2}$ risolvere la disequazione, determinandone tutte le soluzioni con $x \in \mathbb{R}$; indicare le soluzioni principali.

1.4 $\frac{\sin(2x) + 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} \geq 0$ risolvere la disequazione con $0 \leq x \leq 2\pi$

Soluzione

1) $2\sin^2 x - 1 \leq 0$

La disequazione è soddisfatta per i valori reali x che verificano la seguente proposizione:

$$\left(\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \vee \left(\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Nel primo angolo giro le soluzioni sono i valori $\left(\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}\right) \vee \left(\frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}\right)$. L'insieme delle

soluzioni su tutto l'asse reale è: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < \sqrt{3}$

Osserviamo che la disequazione è soddisfatta per i valori x tali che

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

e dunque

$$-\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

3) $2\cos(3x - 15^\circ) \geq \sqrt{2}$

La disequazione è soddisfatta per i valori x degli angoli tali che

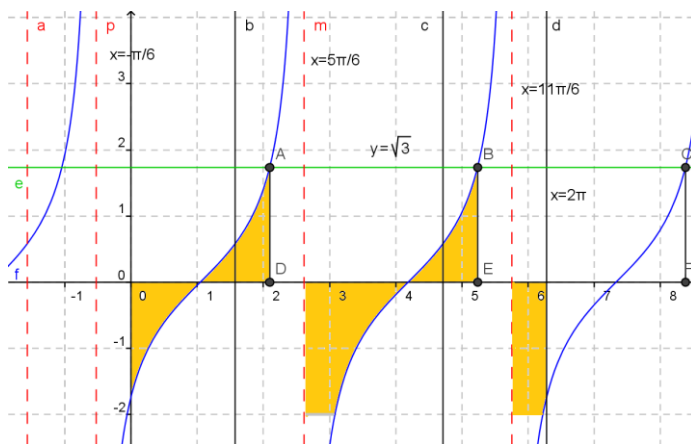
$$-45^\circ + k360^\circ \leq 3x - 15^\circ \leq 45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}, \text{ quindi per i valori}$$

$$-10^\circ + k120^\circ \leq x \leq 20^\circ + k120^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

I valori principali sono quelli che ricadono nel primo giro; il loro insieme è

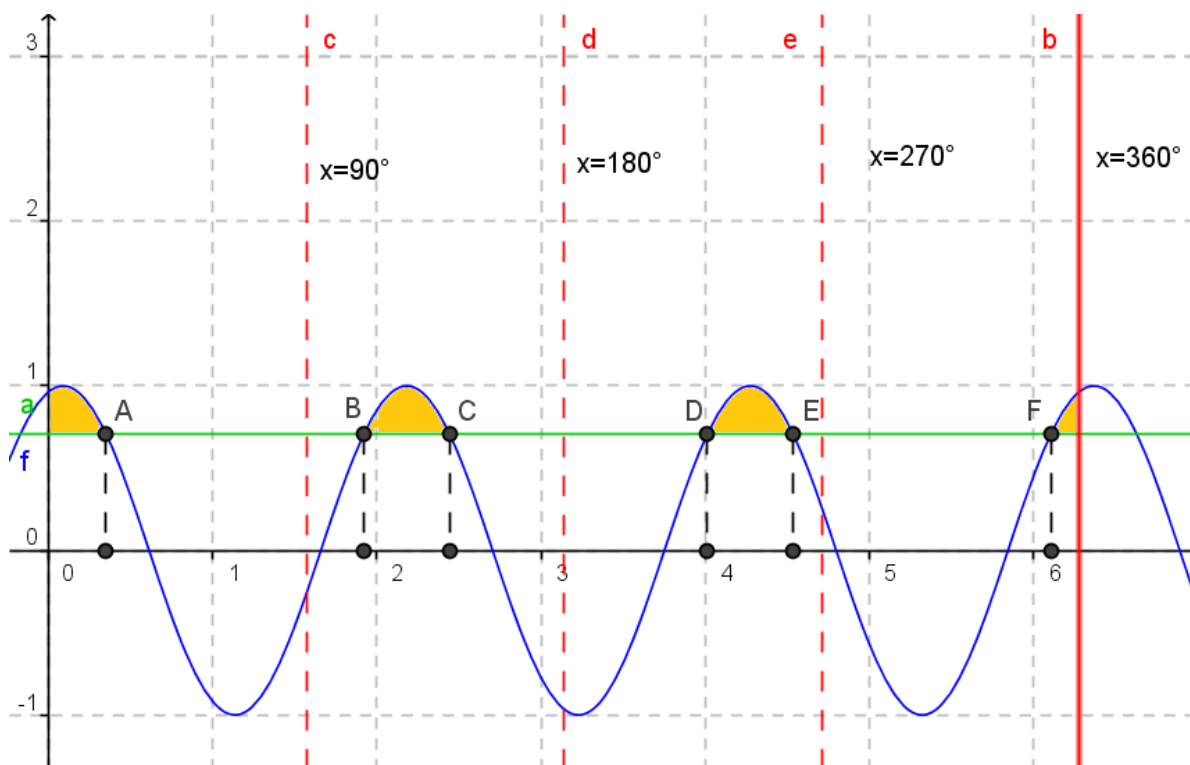
$$S = 0^\circ; 20^\circ \cup 110^\circ; 140^\circ \cup 230^\circ; 260^\circ \cup 350^\circ; 360^\circ$$

Riportiamo la rappresentazione grafica delle soluzioni utilizzando il diagramma della funzione $y = \cos(3x - 15^\circ)$.



¹ Esercizi assegnati nel compito in classe M4-4I-28-02-11





4) $\frac{\sin(2x)+1}{\cos^2 x - \sin^2 x} \geq 0$ risolvere la disequazione con $0 \leq x \leq 2\pi$

Osservazioni

a) Si noti che il numeratore della frazione è non negativo, annullandosi nei punti x per i quali si

ha: $\sin 2x = -1$, dunque per i punti $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Limitatamente all'intervallo

$0 \leq x \leq 2\pi$ i punti in cui si annulla il numeratore sono due: $x_1 = \frac{3\pi}{4}, x_2 = \frac{7\pi}{4}$;

negli altri punti dell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$ il numeratore è strettamente positivo.

Concludiamo che la frazione è positiva negli intervalli nei quali è positivo il denominatore.

b) Per il denominatore si osserva che $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$. La disequazione $\cos 2x > 0$

è soddisfatta per i valori reali x tali che $-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e limitatamente

all'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$ l'insieme delle soluzioni è

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \left| \left(0 \leq x < \frac{\pi}{4} \right) \vee \left(\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \right) \vee \left(\frac{7\pi}{4} < x \leq 2\pi \right) \right. \right\}$$

Osserviamo, infine, che i due valori $x_1 = \frac{3\pi}{4}, x_2 = \frac{7\pi}{4}$, nei quali si annulla il numeratore della frazione, annullano anche il denominatore, per cui non sono soluzioni della disequazione.

L'insieme delle soluzioni della disequazione in esame, per quanto esposto, è l'insieme S descritto sopra.

