

Disequazioni goniometriche

a) $2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - 4 < 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$

Soluzione

L'equazione associata $2t^2 + 3\sqrt{2}t - 4 = 0$ ammette come soluzioni $t_1 = -2\sqrt{2}$, $t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e la disequazione $2t^2 + 3\sqrt{2}t - 4 < 0$ è soddisfatta per valori interni all'intervallo delle radici, quindi per i valori reali di t che verificano la doppia disuguaglianza: $-2\sqrt{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$; la disequazione goniometrica in esame è soddisfatta per i valori x che verificano la doppia disuguaglianza $-2\sqrt{2} < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, cioè il sistema seguente

$$\begin{cases} \sin x > -2\sqrt{2} \\ \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Osserviamo che risultando $-2\sqrt{2} < -1$, la prima disequazione è soddisfatta per ogni x reale, mentre la seconda disequazione è soddisfatta per i valori x che verificano la condizione:

$$\left(0 \leq x < \frac{\pi}{4}\right) \vee \left(\frac{3\pi}{4} < x \leq 2\pi\right).$$

Conclusione

L'insieme delle soluzioni della disequazione è $S = \left[0; \frac{\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{3\pi}{4}; 2\pi \right]$

b) $\cos x + \sqrt{3}\sin x > 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$

Soluzione

Osservazione preliminare

Questa disequazione si può risolvere in diversi modi; scegliamo il metodo incentrato sulla fattorizzazione che si ottiene mettendo in evidenza il fattore $\cos x$.

Poiché per procedere alla scomposizione in fattori è necessario imporre la condizione $\cos x \neq 0$, è necessario stabilire se qualcuno dei valori degli angoli per i quali risulta $\cos x = 0$ è soluzione della disequazione.

Ebbene, le soluzioni di $\cos x = 0$ sono $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$; si riconosce che $x = x_1$ è soluzione della disequazione, mentre non lo è $x = x_2$.

Procediamo ora alla fattorizzazione del primo membro della disequazione.

La disequazione in esame si trasforma nel seguente sistema
$$\begin{cases} \cos x (1 + \sqrt{3}\tan x) > 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}.$$

Per risolvere la disequazione $\cos x (1 + \sqrt{3}\tan x) > 0$ si devono risolvere separatamente le disequazioni

b.1) $\cos x > 0$, b.2) $1 + \sqrt{3}\tan x > 0$ e mettere a confronto i rispettivi insiemi di soluzione (costruendo il grafico comparativo) per determinare il segno del prodotto. Risulta che:

$\cos x > 0$ è soddisfatta per $\left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right) \vee \left(\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi\right);$

$1 + \sqrt{3}\tan x > 0$ è soddisfatta per $\left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right) \vee \left(\frac{5\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}\right) \vee \left(\frac{11\pi}{6} < x \leq 2\pi\right)$

Disequazioni goniometriche

Eseguendo lo studio del prodotto dei segni dei due fattori si riscontra che il segno è positivo per i seguenti valori di x : $\left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right) \vee \left(\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}\right) \vee \left(\frac{11\pi}{6} < x < 2\pi\right)$.

Conclusione

Visto che in precedenza si è detto che $x_1 = \frac{\pi}{2}$ è soluzione della disequazione, possiamo concludere

che l'insieme delle soluzioni della disequazione in esame è: $S = \left[0; \frac{5\pi}{6}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$.

c) $\frac{\cos x + \sqrt{3}\sin x}{\tan x} > 0$

Soluzione

La disequazione è fratta. Allo scopo di determinare lo studio del segno della frazione è necessario studiare il segno del numeratore e del denominatore. Nell'esercizio precedente (b) abbiamo già studiato l'insieme delle soluzioni della disequazione

$\cos x + \sqrt{3}\sin x > 0$; basta, dunque, studiare l'insieme delle soluzioni della disequazione $\tan x > 0$ e porre a confronto i due insiemi di soluzioni.

Limitatamente all'intervallo $[0; 2\pi]$ la disequazione $\tan x > 0$

è soddisfatta nell'insieme $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\pi; \frac{3\pi}{2}\right[$.

Confrontando i segni del numeratore e del denominatore della frazione si riconosce che la frazione assume segno positivo nel seguente insieme:

$$S = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}; \pi\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}\right[.$$

Nella figura a lato sono state riportate le funzioni

$y = \tan x$ in colore nero

$y = \cos x + \sqrt{3}\sin x$ in colore blu

$y = \frac{\cos x + \sqrt{3}\sin x}{\tan x}$ in colore rosso;

sono inoltre indicate le rette

$$a: x=0, \quad b: x=\frac{11\pi}{6}, \quad c: x=\frac{\pi}{2}, \quad d: x=\frac{5\pi}{6}, \quad e: x=\pi, \quad i: x=\frac{3\pi}{2}, \quad j: x=\frac{11\pi}{6}$$

L'insieme delle soluzioni della disequazione è costituito dall'unione degli intervalli in ciascuno dei quali le ordinate dei punti della curva di colore rosso sono positive.

