

Disequazioni goniometriche lineari in $\sin x$ e $\cos x$

1) $4\cos x - 2\sqrt{3}\sin x + 1 > 0$

Soluzione

Possiamo risolvere la disequazione utilizzando le formule parametriche per $\sin x$ e $\cos x$,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \text{ con } t = \tan\left(\frac{x}{2}\right).$$

Osserviamo, comunque, che i valori $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, per i quali perdono di significato le suddette formule parametriche, la disequazione non è soddisfatta e dunque trasformandola applicando le formule indicate si ottiene una disequazione equivalente.

Ciò premesso, la disequazione diventa

$$4 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 1 > 0 \rightarrow 4 - 4t^2 - 4\sqrt{3}t + 1 + t^2 > 0 \rightarrow 3t^2 + 4\sqrt{3}t - 5 < 0$$

La disequazione ottenuta è soddisfatta per $-\frac{5}{3}\sqrt{3} < t < \frac{\sqrt{3}}{3}$, cioè per i valori x tali che

$$-\frac{5}{3}\sqrt{3} < \tan\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Sviluppando la doppia disuguaglianza si ricava

$$\arctg\left(-\frac{5}{3}\sqrt{3}\right) + k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \rightarrow 2\arctg\left(-\frac{5}{3}\sqrt{3}\right) + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

* * * * *

2) $3\sin x - 4\cos x - 3 \geq 0$

Soluzione

Per la risoluzione di questa disequazione ricorriamo al **metodo grafico**, precisamente, sfruttiamo le potenzialità della **geometria analitica**.

Poniamo $\sin x = Y$ e $\cos x = X$ e trasformiamo la disequazione in esame nella seguente disequazione lineare $3Y - 4X - 3 \geq 0$. Questa disequazione va abbinata con l'equazione cartesiana della circonferenza goniometrica: $X^2 + Y^2 = 1$ resolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 3Y - 4X - 3 \geq 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \quad (*)$$

Si tratta di intersecare la retta $s: 3Y - 4X - 3 = 0$ con la circonferenza goniometrica e sfruttando gli eventuali punti di intersezione risalire agli angoli che rappresentano le soluzioni della disequazione goniometrica considerata. Riportiamo alcune elaborazioni.

$$\begin{cases} 3Y - 4X - 3 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y = \frac{4}{3}X + 1 \\ X^2 + \left(\frac{4}{3}X + 1\right)^2 = 1 \end{cases} \rightarrow X^2 + \frac{16}{9}X^2 + \frac{8}{3}X = 0 \rightarrow 25X^2 + 24X = 0 \rightarrow$$



$$\begin{cases} X_1 = 0 \\ Y_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} X_2 = -\frac{24}{25} \\ Y_2 = -\frac{7}{25} \end{cases}.$$

Al punto $A(0;1)$ corrisponde l'angolo $x = \frac{\pi}{2}$, mentre al punto $B\left(-\frac{24}{25}; -\frac{7}{25}\right)$ corrisponde

l'angolo $\alpha = 2\pi - \arccos\left(-\frac{24}{25}\right)$.

Ricerca degli angoli che soddisfano la disequazione

Per determinare gli angoli che verificano la disequazione è necessario stabilire quale dei due archi della circonferenza goniometrica aventi per estremi i punti A e B verificano la disuguaglianza $3Y - 4X - 3 \geq 0$. A tal fine, ricordiamo che una qualsiasi retta nel piano cartesiano, la cui equazione sia $r: ax + by + c = 0$, divide il piano in due semipiani caratterizzati dalla seguente proprietà:

<< posto $\varphi(x; y) = ax + by + c$, in ciascun punto $P(x; y)$ appartenente ad uno dei due semipiani non appartenenti alla retta r risulta $\varphi(x; y) > 0$ e in ciascun punto dell'altro semipiano, sempre al di fuori della retta r , risulta $\varphi(x; y) < 0$ >>.

Ciò premesso, per individuare la regione del piano cartesiano in cui è soddisfatta la disuguaglianza $3Y - 4X - 3 \geq 0$ è sufficiente scegliere un punto non appartenente alla retta $s: 3Y - 4X - 3 = 0$ e calcolare il valore del primo membro su tal punto. Visto che la retta s non passa per l'origine, scegliamo questo come "punto spia" per il controllo.

Con

$$\varphi(X; Y) = 3Y - 4X - 3, \text{ avendosi}$$

$$\varphi(0; 0) = -3 < 0,$$

deduciamo che la disuguaglianza $3Y - 4X - 3 \geq 0$ è soddisfatta, oltre che sui punti della retta s , nei punti del semipiano avente per origine s e non contenente l'origine O degli assi.

A questo punto possiamo concludere che l'insieme delle soluzioni del sistema (*) è rappresentato dall'arco di circonferenza avente per estremi A e B, percorso in verso antiorario, e che l'insieme delle soluzioni della disequazione goniometrica in esame è:

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \alpha + 2k\pi \right], \text{ con } \alpha = 2\pi - \arccos\left(-\frac{24}{25}\right).$$

