Semplificazione di due espressioni goniometriche e verifica di un'identità goniometrica

Semplificare le due espressioni e verificare l'identità goniometrica, precisando le eventuali condizioni che permettono la trasformazione di ciascuna espressione in quella equivalente.

a) $tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)+2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\csc(\alpha)$ b) $tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)-tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-tan(\alpha)$

c) $sen^2(2\alpha)\cdot tan^2(\alpha)=\cos^2(2\alpha)-4\cos^2(\alpha)+3$

Elaborazioni

a) Ricordiamo che:

1. la funzione tangente $tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ è definita per i valori dell'angolo α tali che $\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$, quindi deve risultare $\alpha\neq\pi+2k\pi, k\in Z$;
2. la funzione csc(α)=1/sen(α) è definita per i valori dell'angolo che verificano la condizione: $sen(\alpha)\neq 0$, quindi $\alpha\neq k\pi, k\in Z$. Osserviamo che questa condizione è più restrittiva di quella imposta nel precedente punto; perciò, per la definizione dell'intera espressione deve essere $\alpha\neq k\pi, k\in Z$.
3. Per la funzione $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ sussistono le seguenti espressioni razionali in funzione dell'angolo α

   $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{sen\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha}$.
4. Per la funzione $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ possiamo utilizzare l'espressione che segue, dedotta dalle **formule di duplicazione**: $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1+\cos(\alpha)}{2}$.

Elaboriamo l'espressione come segue:

$$tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)+2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\csc(\alpha)=\frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha}+2\cdot\frac{1+\cos(\alpha)}{2}\cdot\frac{1}{sen\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{sen\alpha}=\frac{2}{sen\alpha}.$$

*** ***

b) $tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)-tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-tan(\alpha)$

Precisiamo per quali valori dell'angolo ha senso l'espressione goniometrica.
Devono risultare soddisfatte le seguenti tre condizioni:

b.1) $\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, b.2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, b.3) $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, con $k\in Z$

Elaborando le prime due si perviene alle seguenti condizioni di esistenza (C.d.E.)

$\left(\alpha\neq-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\wedge\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\wedge\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, con $k\in Z$.

Le tre condizioni possono essere riassunte dalla terza: $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$.

Scriviamo ora l'espressione assegnata come segue:

$$tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)-tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-tan(\alpha)=\ tan\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)-tan\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)-tan(\alpha)=$$

$$tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\right)-tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{2}\right)-tan(\alpha).$$

Applichiamo ai primi due termini l'uguaglianza $\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1-\cos(\beta)}{sen(\beta)}$ [1]. Si ottiene:

$$\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}-\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}-tan(\alpha)$$, a questo punto teniamo conto delle relazioni esistenti tra le funzioni goniometriche seno e coseno per **coppie di angoli complementari o che differiscono per un angolo retto**. Possiamo scrivere:

$$\frac{1-\text{sen}(\alpha)}{cos(\alpha)}-\frac{1-(-sen(\alpha))}{\cos(\alpha)}-tan(\alpha)=\frac{1-\text{sen}(\alpha)}{cos(\alpha)}-\frac{1+sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}-\frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}=\frac{1-\text{sen}(\alpha)-1-\text{sen}(\alpha)-\text{sen}(\alpha)}{cos(\alpha)}=$$

$$\frac{-3\text{sen}(\alpha)}{cos(\alpha)}=-3\tan(\alpha)$$

Osservazione

L'espressione goniometrica in esame può essere elaborata anche in modo diverso; precisamente, si possono applicare nella trasformazione le formule di sottrazione e di addizione alla funzione tangente. Le espressioni che si ottengono sono più estese ma non presentano particolari difficoltà di calcolo. Consigliamo il lettore interessato a provare il percorso suggerito, come utile esercitazione per impadronirsi delle tecniche di calcolo. Qui riportiamo solo il primo passaggio.

$$tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)-tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-tan(\alpha)=\frac{tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}-\frac{tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}-tan(\alpha)=$$

$$\frac{1-tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}-\frac{1+tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}-tan(\alpha)$$

Procedere applicando a $tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ una delle due espressioni razionali della stessa tramite sen(α) e cos(α).

*** ***

c) $sen^2(2\alpha)\cdot tan^2(\alpha)=\cos^2(2\alpha)-4\cos^2(\alpha)+3$

La presenza nell'espressione della funzione tangente richiede che per l'esistenza della stessa deve sussistere la condizione seguente: $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$. Ciò premesso, elaboriamo i due membri applicando le formule di duplicazione.

$$\left[2sen(\alpha)\cdot cos(\alpha)\right]^2\cdot\frac{sen^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}=\left[\cos^2(\alpha)-\text{sen}^2(\alpha)\right]^2-4\cos^2(\alpha)+3\rightarrow$$

[1] Questa è una delle espressioni razionali di tan(α/2) in funzione di sen(α) e cos(α).

$$4sen^2(\alpha)\cdot \cancel{cos^2(\alpha)}\cdot\frac{sen^2(\alpha)}{\cancel{\cos^2(\alpha)}}=\left[2\cos^2(\alpha)-1\right]^2-4\cos^2(\alpha)+3\rightarrow$$

$$4sen^4(\alpha)=4\cos^4(\alpha)-4\cos^2(\alpha)+1-4\cos^2(\alpha)+3\rightarrow\ 4sen^4(\alpha)=4\cos^4(\alpha)-8\cos^2(\alpha)+4\rightarrow$$

$$\cancel{4}sen^4(\alpha)=\cancel{4}\left[\cos^4(\alpha)-2\cos^2(\alpha)+1\right]\rightarrow\ sen^4(\alpha)=\left[\cos^4(\alpha)-2\cos^2(\alpha)+1\right]\rightarrow$$

$$sen^4(\alpha)=\left[1-\cos^2(\alpha)\right]^2\rightarrow\ sen^4(\alpha)=\left[\text{sen}^2(\alpha)\right]^2$$

Concludiamo che l'identità è soddisfatta per tutti i valori dell'angolo α che soddisfano la condizione precisata: $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$.

L2.mat