Note teoriche di Goniometria

Equazioni omogenee in sen*x* e cos*x* di primo o secondo grado

Premessa teorica-1: equazione omogenea di primo grado

L'equazione goniometrica $a\cdot sen(x)+b\cos(x)=0$, con $(a\neq 0)\wedge(b\neq 0)$

non ammette come soluzioni gli angoli x per i quali sia cos(x)=0 e dunque è possibile trasformarla in una equivalente dividendo i due membri per cos(x) ottenendo:

$\dfrac{a\cdot sen(x)}{\cos(x)}+\dfrac{b\cos(x)}{\cos(x)}=0$, da cui $a\tan(x)+b=0\rightarrow\ \tan(x)=-\dfrac{b}{a}$. Quale che sia il numero reale -*b*/*a* l'equazione ammette infinite soluzioni; esprimendo la misura degli angoli in radianti le soluzioni sono i valori x della forma $x=arctg\left(-\dfrac{b}{a}\right)+k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$. I suddetti angoli si possono indicare anche con una delle seguenti espressioni:

$x=\tan^{-1}\left(-\dfrac{b}{a}\right)+k\pi$, $x=\arctan\left(-\dfrac{b}{a}\right)$, sempre con $k\in\mathbb{Z}$.

Esprimendo la misura degli angoli in gradi sessagesimali le soluzioni sono i valori $x=arctg\left(-\dfrac{b}{a}\right)+k\cdot 180°$, sempre con $k\in\mathbb{Z}$.

Premessa teorica-2: equazione omogenea di secondo grado

2.1) L'equazione goniometrica

$a\cdot sen^2(x)+b\cdot sen(x)\cos(x)+c\cdot\cos^2(x)=0$, con $(a\neq 0)\wedge(b\neq 0)\wedge(c\neq 0)$, non ammette come soluzioni gli angoli x tali che cos(x)=0, quindi si può trasformare nell'equazione equivalente che si ottiene dividendo per $\cos^2(x)$:

$a\cdot\dfrac{sen^2(x)}{\cos^2(x)}+b\cdot\dfrac{sen(x)\cos(x)}{\cos^2(x)}+c\cdot\dfrac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}=0\rightarrow\ a\cdot\tan^2 x+b\cdot\tan x+c=0$, o semplicemente $a\cdot t^2+b\cdot t+c=0$,,

con t = tan$x$. Relativamente all'equazione di secondo grado associata nell'incognita tan(x), se questa ammette soluzioni reali si risalirà agli angoli x soluzioni dell'equazione di partenza; se l'equazione di secondo grado associata non ammette soluzioni reali non ne avrà neanche l'equazione di partenza.

2.2) L'equazione completa

$a\cdot sen^2(x)+b\cdot sen(x)\cos(x)+c\cdot\cos^2(x)+d=0$, con $(a\neq 0)\wedge(b\neq 0)\wedge(c\neq 0)\wedge(d\neq 0)$ si trasforma nell'equazione della forma (2.1) moltiplicando il termine noto d per $\text{sen}^2 x+\cos^2 x$ perché $\text{sen}^2 x+\cos^2 x=1$ ottenendo:

$$a\cdot sen^2(x)+b\cdot sen(x)\cos(x)+c\cdot\cos^2(x)+d\cdot\left[sen^2(x)+\cos^2(x)\right]=0\rightarrow$$
$$(a+d)\cdot sen^2(x)+b\cdot sen(x)\cos(x)+(c+d)\cdot\cos^2(x)=0$$

e procedendo come indicato per l'equazione (2.1)

Equazioni omogenee di secondo grado incomplete

2.3) $a\cdot sen^2(x)+b\cdot sen(x)\cos(x)=0,(a\neq 0)\wedge(b\neq 0)$. Si scompone in fattori il primo membro:

$sen(x)\cdot\left[a\cdot sen(x)+b\cdot\cos(x)\right]=0$. Per la legge di annullamento del prodotto
$\Leftrightarrow(sen(x)=0)\vee(a\cdot sen(x)+b\cdot\cos(x)=0)$; si ricavano le soluzioni:

2.3.1) $sen(x)=0\rightarrow x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$;

2.3.2) $a\cdot sen(x)+b\cdot\cos(x)=0\rightarrow\ \tan x=-\dfrac{b}{a}\rightarrow\ x=\tan^{-1}\left(-\dfrac{b}{a}\right)+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

L'insieme di tutte le soluzioni della 2.3) è $S=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|(x=k\pi)\vee\left(x=\tan^{-1}\left(-\dfrac{b}{a}\right)+k\pi\right),k\in\mathbb{Z}\right\}$.

2.4) $a\cdot cos^2(x)+b\cdot sen(x)\cos(x)=0,\ (a\neq 0)\wedge(b\neq 0)$. Si scompone in fattori il primo membro:

$cos(x)\cdot\left[a\cdot cos(x)+b\cdot\mathrm{sen}(x)\right]=0$ che per la legge di annullamento del prodotto è equivalente a
$(cos(x)=0)\vee(a\cdot cos(x)+b\cdot\mathrm{sen}(x)=0)$; si ricavano le soluzioni risolvendo le due equazioni di primo grado che si ottengono.

2.4.1) $cos(x)=0\rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$;

2.4.2) $a\cdot cos(x)+b\cdot\mathrm{sen}(x)=0\rightarrow\tan x=-\dfrac{a}{b}\rightarrow x=\tan^{-1}\left(-\dfrac{a}{b}\right)+k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$

L'insieme delle soluzioni della (2.4) è $S=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\left(x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)\vee\left(x=\tan^{-1}\left(-\dfrac{a}{b}\right)+k\pi\right),k\in\mathbb{Z}\right\}$

2.5) $a\cdot sen^2(x)+b\cdot\cos^2(x)=0$, con $(a\neq 0)\wedge(b\neq 0)$. Si passa all'equazione equivalente

$$a\cdot\frac{sen^2(x)}{\cos^2(x)}+b\cdot\frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}=0\rightarrow a\cdot\tan^2(x)+b=0\rightarrow\ \tan^2(x)=-\frac{b}{a}$$

2.5.1) Se $-\dfrac{b}{a}>0$ si avrà $\tan x=\pm\sqrt{-\dfrac{b}{a}}$ e si otterranno le soluzioni dell'equazione in oggetto:

$$\left(x=\tan^{-1}\left(-\sqrt{-\frac{b}{a}}\right)+k\pi\right)\vee\left(x=\tan^{-1}\left(\sqrt{-\frac{b}{a}}\right)+k\pi\right),k\in\mathbb{Z}$$

2.5.2) Se $-\dfrac{b}{a}<0$ l'equazione goniometrica in oggetto non ha soluzioni reali.