Goniometria

Equazioni lineari in sen(x) e cos(x) risolte con il metodo dell'angolo aggiunto

1. $\sqrt{2}sen(x)-\sqrt{2}\cos(x)=1$ $\qquad S=\left\{x\in R\middle|\left(x=\frac{5}{12}\pi+2k\pi\right)\vee\left(x=\frac{13}{12}\pi+2k\pi\right),k\in Z\right\}$
2. $sen(x)+\sqrt{3}\cos(x)+\sqrt{3}=0$ $\qquad S=\left\{x\in R\middle|\left(x=\pi+2k\pi\right)\vee\left(x=\frac{4}{3}\pi+2k\pi\right),k\in Z\right\}$
3. $sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1=0$ $\qquad S=\left\{x\in R\middle|\left(x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)\vee\left(x=-\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right),k\in Z\right\}$

Elaborazioni

Premessa teorica

L'equazione lineare in sen(x) e cos(x)

$$a\cdot sen(x)+b\cdot\cos(x)=k \text{ , con } a\neq 0 \text{ e } b\neq 0 \qquad \text{(m)}$$

si può risolvere in quattro differenti modi. Qui vogliamo utilizzare il metodo dell'angolo aggiunto. Di cosa si tratta? Si deve scrivere il primo membro in una forma del tipo sen(x+φ), sen(x-φ), cos(x+φ), cos(x-φ). Una volta decisa la forma da ottenere si determina "l'angolo aggiunto φ" che assicura la forma desiderata. Nel caso che consideriamo ora vogliamo ottenere per l'equazione in oggetto il modello sen(x+φ)[(1)].

1. Come primo passo si moltiplicano e si dividono i due termini del primo membro per il fattore $\sqrt{a^2+b^2}$ e si passa alla forma seguente

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot sen(x)+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos(x)\right]=k\rightarrow$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot sen(x)+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos(x)=\frac{k}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \text{(m.1)}$$

2. Poiché la formula di addizione per la funzione seno è $sen(x+\varphi)=sen(x)\cdot\cos(\varphi)+\cos(x)\cdot sen(\varphi)$, l'angolo aggiunto φ richiesto dovrà soddisfare le due condizioni:

$$\cos(\varphi)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad sen(\varphi)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad \text{(m.2)}$$

Ebbene, un tale angolo esiste certamente perché si riconosce immediatamente che i numeri $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ appartengono all'intervallo]-1;1[e che la somma dei loro quadrati vale 1,

---

[(1)] Il lettore può esercitarsi ed individuare il corrispondente valore dell'angolo φ∈]0;2π[che permette di scrivere il primo membro dell'equazione (1) in un'altra qualsiasi delle tre forme indicate: sen(x-φ), cos(x+φ), cos(x-φ). Riscontrerà che le soluzioni che otterrà per l'equazione goniometrica affrontata coincideranno con quelle che saranno trovate qui.

sodisfano dunque la relazione pitagorica $\cos^2(\varphi)+\mathrm{sen}^2(\varphi)=1$. Precisiamo che esistono infiniti angoli che verificano le uguaglianze (m. 2) ed essi differiscono tra loro per un multiplo di 2π.

3. Una volta ottenuta per l'equazione goniometrica da risolvere la forma del tipo

$$sen(x+\varphi)=\frac{k}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \text{(m.3)}$$

l'equazione ammetterà soluzioni se e solo se il numero $\frac{k}{\sqrt{a^2+b^2}}$ verificherà la doppia limitazione

$$-1\le\frac{k}{\sqrt{a^2+b^2}}\le 1; \qquad \text{(m.4)}$$

in caso contrario l'equazione non ammetterà soluzioni.

*** Fine della premessa teorica ***

Affrontiamo la risoluzione della prima equazione proposta.

1. $\sqrt{2}sen(x)-\sqrt{2}\cos(x)=1 \rightarrow sen(x)-\cos(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$sen(x)-\cos(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\rightarrow\sqrt{2}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot sen(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos(x)\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot sen(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos(x)=\frac{1}{2} \qquad \text{(1.1)}$$

L'angolo aggiunto $\varphi\in]0;2\pi[$ deve verificare le condizioni

$\cos(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ sen(\varphi)=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2};$ l'angolo richiesto è: $\varphi=\frac{7}{4}\pi$.

L'equazione (1.1) si può dunque scrivere nella forma seguente

$$sen\left(x+\frac{7}{4}\pi\right)=\frac{1}{2} \qquad \text{(1.2)}$$

dalla quale si deduce che dovrà risultare $\left(x+\frac{7}{4}\pi=\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\vee\left(x+\frac{7}{4}\pi=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\Leftrightarrow$

$$\left(x=\frac{\pi}{6}-\frac{7}{4}\pi+2k\pi\right)\vee\left(x=\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{7}{4}\pi+2k\pi\right)\Leftrightarrow\left(x=-\frac{19}{12}\pi+2k\pi\right)\vee\left(x=-\frac{11}{12}\pi+2k\pi\right),k\in Z\ .$$

Possiamo anche scrivere le soluzioni dell'equazione assumendo come angoli generatori due angoli del primo giro. In questo caso gli angoli soluzioni dell'equazione sono:

$\left(x=\frac{5}{12}\pi+2k\pi\right)\vee\left(x=\frac{13}{12}\pi+2k\pi\right), k\in Z$. Scriviamo l'insieme S delle soluzioni

$S=\left\{x\in R\middle|\left(x=\frac{5}{12}\pi+2k\pi\right)\vee\left(x=\frac{13}{12}\pi+2k\pi\right), k\in Z\right\}$

2. $sen(x)+\sqrt{3}\cos(x)+\sqrt{3}=0$ Risoluzione dell'equazione con il **metodo dell'angolo aggiunto**. I passaggi che seguono non saranno commentati in dettaglio. Il lettore faccia riferimento alla metodologia esposta nella <<Premessa teorica>>.

$$sen(x)+\sqrt{3}\cos(x)=-\sqrt{3}\rightarrow\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}\cdot\left[\frac{sen(x)}{\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}}\cos(x)\right]=-\sqrt{3}\rightarrow$$

$$\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}\cdot\left[\frac{sen(x)}{\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}}\cos(x)\right]=-\sqrt{3}\rightarrow$$

$$\frac{1}{2}sen(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (2.1)$$

Vogliamo ottenere al primo membro la forma corrispondente a cos(x-φ), quindi dobbiamo ricercare per quale angolo φ si ha la forma

$$\cos(x)\cos(\varphi)+\mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(\varphi)=-\frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (2.2)$$

Dal confronto del primo membro della (2.1) con il primo membro della (2.2) si evince che devono essere soddisfatte le uguaglianze

$$\cos(\varphi)=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \mathrm{sen}(\varphi)=\frac{1}{2};$$

l'unico angolo φ del primo giro che le soddisfa è $\varphi=\frac{\pi}{6}$. L'equazione goniometrica diventa

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (2.3)$$

Gli angoli *x* richiesti si deducono dall'unione delle seguenti forme: $x-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $x-\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$, con k∈Z, che elaborate diventano rispettivamente $x=\pi+2k\pi$, $x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$, k∈Z. Scriviamo l'insieme S delle soluzioni $S=\left\{x\in R\middle|(x=\pi+2k\pi)\vee\left(x=\frac{4}{3}\pi+2k\pi\right), k\in Z\right\}$.

3. $sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1=0$ Poniamo $x+\frac{\pi}{4}=\alpha$ e procediamo ancora con il **metodo dell'angolo aggiunto**.

$sen(\alpha)+\cos(\alpha)=1 \to \left[\frac{1}{\sqrt{2}}sen(\alpha)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\alpha)\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Determiniamo l'angolo angolo φ del primo giro in modo che al primo membro si abbia l'espressione di sen(α+φ). Quindi, deve risultare

$\text{sen}(\alpha)\cos(\varphi)+\cos(\alpha)sen(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2}}sen(\alpha)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\alpha)$, perciò deve essere $\cos(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2}} \wedge sen(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ e ciò si ha per $\varphi=\frac{\pi}{4}$. L'equazione che si ottiene è $sen\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, da cui

$\left(\alpha+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right) \vee \left(\alpha+\frac{\pi}{4}=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)$. Tornado alla variabile x si ha

$$\left(x+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right) \vee \left(x+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right) \to \left(x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right) \vee \left(x=-\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right),\ k \in Z .$$

L'insieme delle soluzioni è $S=\left\{x \in R \middle| \left(x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right) \vee \left(x=-\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right), k \in Z\right\}$.