Geometria analitica e goniometria

Equazione di un'iperbole in forma parametrica

Traccia

Della curva λ sono note le equazione parametriche $\lambda : \begin{cases} x(t) = 2 + \dfrac{1}{\cos^2 t - \sin^2 t} \\ y(t) = 2\tan(2t) \end{cases}$

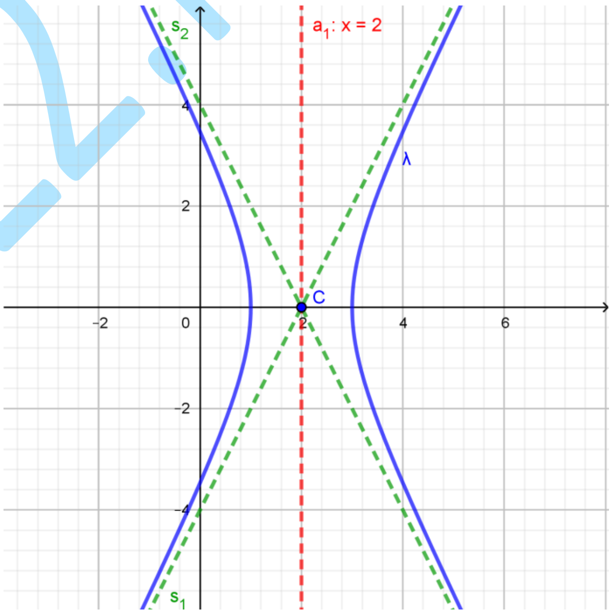
Determinare l'equazione cartesiana della curva. Precisare il tipo di curva e indicarne le caratteristiche.

Elaborazioni

$$\begin{cases} x(t) = 2 + \dfrac{1}{\cos^2 t - \sin^2 t} \\ y(t) = 2\tan(2t) \end{cases} \to \begin{cases} x(t) = 2 + \dfrac{1}{\cos(2t)} \\ y(t) = 2\dfrac{sen(2t)}{\cos(2t)} \end{cases} \to \begin{cases} x - 2 = \dfrac{1}{\cos(2t)} \\ \dfrac{y}{2} = \dfrac{sen(2t)}{\cos(2t)} \end{cases}$$

Eseguendo il rapporto membro a membro si ottiene

$\dfrac{x-2}{\frac{y}{2}} = \dfrac{1}{\cos(2t)} : \dfrac{sen(2t)}{\cos(2t)}$, da cui si ha $\dfrac{2(x-2)}{y} = \dfrac{1}{sen(2t)}$;



Sussiste pertanto il seguente sistema

$$\begin{cases} x - 2 = \dfrac{1}{\cos(2t)} \\ \dfrac{2(x-2)}{y} = \dfrac{1}{sen(2t)} \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} = \cos(2t) \\ \dfrac{y}{2(x-2)} = sen(2t) \end{cases}$$

Elevando al quadrato i due membri delle due equazioni e sommando membro a membro si ricava l'uguaglianza

$\dfrac{1}{(x-2)^2} + \dfrac{y^2}{4(x-2)^2} = \cos^2(2t) + sen^2(2t)$, quindi

l'uguaglianza $\dfrac{1}{(x-2)^2} + \dfrac{y^2}{4(x-2)^2} = 1$, che per $x \neq 2$ è equivalente alla seguente $4 + y^2 = 4(x-2)^2$; ridotta alla forma normale diventa $4x^2 - y^2 - 16x + 12 = 0$.

L'equazione rappresenta un'iperbole che nel riferimento cartesiano xOy ha gli assi di simmetria traslati rispetto agli assi coordinati.

Possiamo porre l'equazione sotto una forma più semplice da interpretare.

$$4x^2 - y^2 - 16x + 12 = 0 \to 4(x^2 - 4x + 4 - 4) - y^2 + 12 = 0 \to 4(x-2)^2 - y^2 = 4 \to (x-2)^2 - \frac{y^2}{4} = 1$$

L'iperbole ha centro nel punto C(2;0) e i suoi assi di simmetria sono la retta x=2 e l'asse delle ascisse.

Gli asintoti dell'iperbole sono le rette s_1:y=2x-4, s_2:y=-2x+4. L'eccentricità della curva vale $e=\sqrt{5}$.