Esercitazione con le funzioni circolari inverse

Calcolo di un'espressione contenente arcsen(x) e arccos(x)

Calcolare il valore dell'espressione goniometrica

$$y = arcsen\left(cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right) + arccos\left(sen\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$$

Elaborazioni

Premessa

Osserviamo innanzitutto che l'espressione da calcolare ha senso perché le funzioni arcsen(x) e arccos(x) sono definite per $-1 \le x \le 1$, infatti risulta $0 < \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) < 1$ e $0 < sen\left(\frac{2\pi}{5}\right) < 1$; precisamente, poiché $3\pi/10$ radianti corrisponde a 54° e $2\pi/5$ radianti corrisponde a 72° si ha $\cos(3\pi/10)=\cos(54°)=0,58778…$ e $sen(2\pi/5)=sen(72°)=0,95105…$

*****

Calcoliamo separatamente $y_1 = arcsen\left(\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right)$ e $y_2 = arccos\left(sen\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$.

Calcolo di $y_1 = arcsen\left(cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right)$

Ricordiamo che la funzione arcsen(x), definita in [-1;1], è strettamente crescente ed ha come codominio l'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Il suo diagramma è in Figura 1.

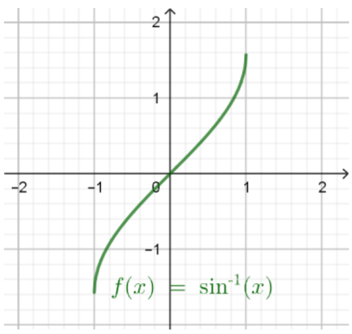

Figura 1

La scrittura $y_1 = arcsen\left(cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right)$ è equivalente alla seguente

$sen(y_1) = cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$, con $y_1 \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ (1.*);

d'altra parte, utilizzando la nota relazione

$sen(y_1) = cos\left(\frac{\pi}{2} - y_1\right)$,

…

Dunque risulta $y_1 = \frac{\pi}{5}$.

Calcolo di $y_2 = arccos\left(sen\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$

Ricordiamo che la funzione arccos (x), definita in [-1;1], è strettamente decrescente ed ha come codominio l'intervallo $[0;\pi]$. Il suo diagramma è in Figura 2.

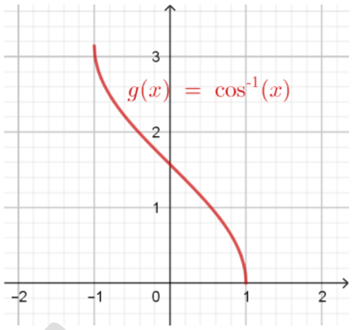

Figura 2

La scrittura $y_2 = arccos\left(sen\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$ è equivalente alla seguente

$cos(y_2) = sen\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, con $y_2 \in [0;\pi]$ (2.*).

Utilizzando ancora la relazione tra le funzioni goniometriche seno, coseno per gli archi complementari

$cos(y_2) = sen\left(\frac{\pi}{2} - y_2\right)$,

…

Conclusione

L'espressione goniometrica obiettivo delle nostre elaborazioni ha il seguente valore:

$$y = y_1 + y_2 = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{3\pi}{10}$$