

Funzione goniometrica e sue trasformazioni

In relazione alla funzione $f(x) = \frac{2(1 - (\sin x + \cos x)^2)}{\sin x}$ risolvere i quesiti che seguono

- 1) Applicando le proprietà delle funzioni elementari $\sin(x)$, $\cos(x)$, semplificare la funzione, riconoscere che è periodica e determinare il suo dominio. Precisare se la funzione è pari o dispari.
- 2) Determinare gli estremi della funzione, precisando se gli stessi sono anche massimo o minimo, e rappresentare il suo diagramma in un conveniente intervallo a piacere dell'asse reale.
- 3) Rappresentare le funzioni $y = |f(x)|$, $y = |f(x)| + 1$, $y = \frac{1}{f(x)}$
- 4) Stabilire quali tra le seguenti funzioni dedotte dalla funzione di partenza $y = f(x)$ hanno lo stesso dominio di definizione di questa, precisando se le stesse sono anche periodiche

4.1) $f(kx)$ 4.2) $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 4.3) $f(\sqrt{x})$ 4.4) $f(e^x)$ 4.5) $f(\ln(x))$

Elaborazioni

- 1) La funzione assegnata si elabora come segue

$$f(x) = \frac{2(1 - (\sin x + \cos x)^2)}{\sin x} = \frac{2(1 - (\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x))}{\sin x} = \frac{-4\sin x \cdot \cos x}{\sin x} = -4\cos x,$$

$$\forall x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

La funzione è dunque definita nell'insieme $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

La funzione è periodica perché lo è la funzione $\cos(x)$ e il suo periodo è $T=2\pi$.

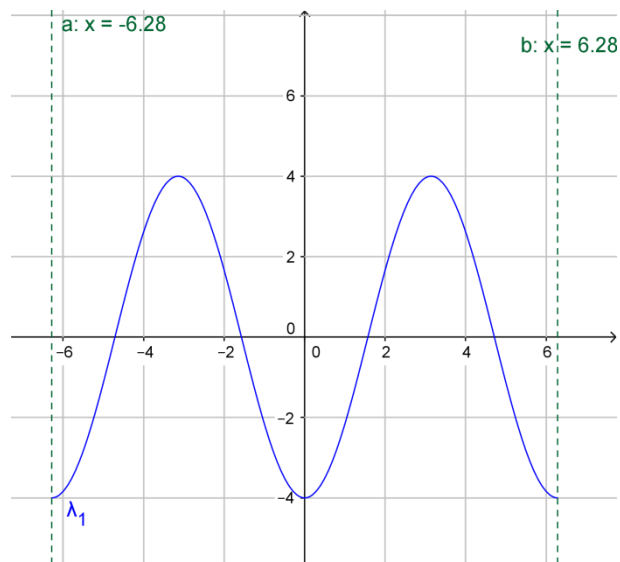
La funzione è pari. Infatti per ogni x del dominio risulta $f(-x) = -4\cos(-x) = -4\cos(x) = f(x)$.

- 2) La funzione in esame è limitata poiché lo è la funzione $\cos(x)$; il suo **codominio** è l'intervallo aperto $] -4; 4[$; l'estremo inferiore è $\text{Inf}(f) = -4$, che non è minimo, l'estremo superiore è $\text{Sup}(f) = 4$, che non è massimo.
- 3) Di seguito sono rappresentate le funzioni richieste, ciascuna per i punti del dominio appartenenti all'intervallo $[-2\pi; 2\pi]$.

A destra è rappresentato il grafico della funzione

$$\lambda_1 : y = f(x) \rightarrow \lambda_1 : y = -4\cos(x)$$

Si osservi che i punti di coordinate $(-2\pi; -4)$, $(-\pi; 4)$, $(0; -4)$, $(\pi; 4)$, $(2\pi; -4)$ non appartengono al grafico della funzione perché le rispettive ascisse non appartengono al dominio della stessa.

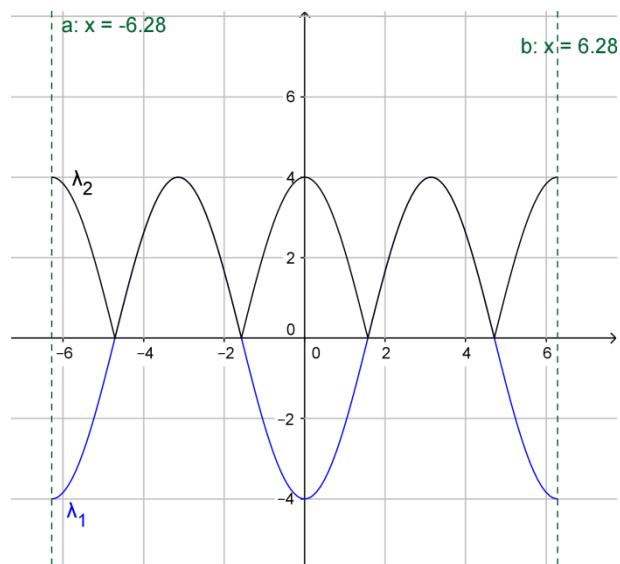


A destra sono rappresentati in colore blu il diagramma della funzione di partenza

$$\lambda_1 : y = -4\cos(x)$$

e in colore nero quello della funzione valore assoluto $|f(x)|$; poiché la funzione $|f(x)|$ per i valori di x tali che $f(x) \geq 0$ coincide con quello della funzione di originaria, il diagramma di quest'ultima è stato nascosto da quello della nuova funzione.

$$\lambda_2 : y = |f(x)| \rightarrow \lambda_2 : y = 4|\cos(x)|$$



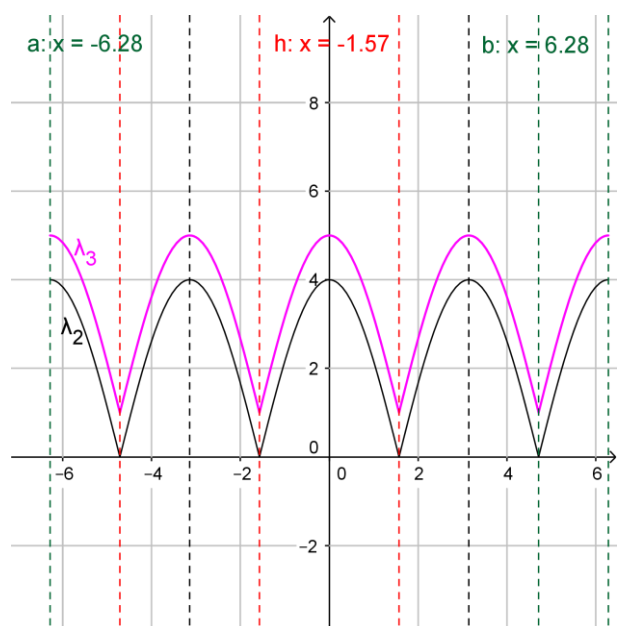
A destra sono rappresentati i diagrammi delle funzioni

$$\lambda_2 : y = 4|\cos(x)|, \text{ in colore nero,}$$

$$\lambda_3 : y = |f(x)| + 1, \text{ in colore fucsia, essendo}$$

$$\lambda_3 : y = 4|\cos(x)| + 1.$$

Il diagramma della funzione $\lambda_3 : y = |f(x)| + 1$ si ottiene da quello della funzione $y = |f(x)|$ traslando questo di una unità nel verso delle ordinate positive, dunque sottoponendo il diagramma della prima funzione alla traslazione determinata dal vettore $\vec{v} = 0\vec{i} + 1\vec{j}$.



A destra sono rappresentati il diagramma della funzione di partenza

$\lambda_1 : y = -4\cos(x)$, in colore blu,

e quello della funzione reciproca $\frac{1}{f(x)}$, in colore verde scuro.

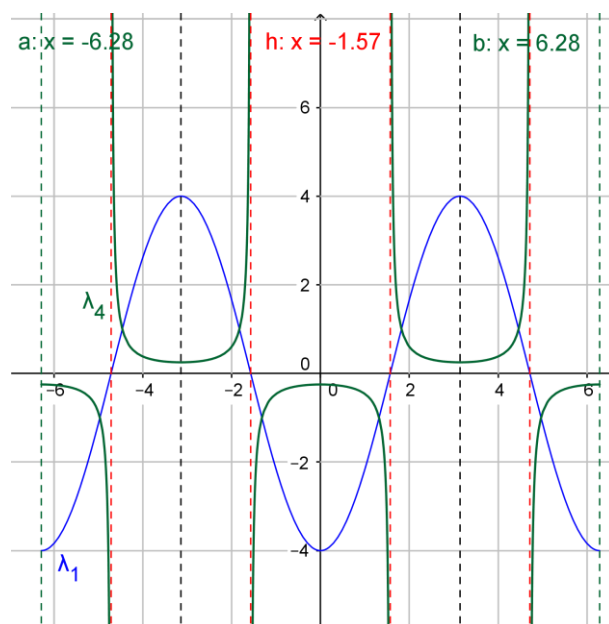
$$\lambda_4 : y = \frac{1}{f(x)} \rightarrow \lambda_4 : y = -\frac{1}{4\cos(x)}$$

Osserviamo che il dominio di definizione della funzione reciproca si ottiene da quello della funzione originaria escludendo i punti in cui questa si annulla, quindi i punti della forma

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \text{ Le rette venti equazione}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ sono altrettanti asintoti}$$

verticali per la funzione reciproca.



- 4) Tra le funzioni proposte l'unica che è periodica è la funzione $f(kx) = -4\cos(kx)$, che ha periodo

$$T = \frac{2\pi}{k}; \text{ le altre non sono periodiche.}$$

Per quanto concerne il dominio di definizione delle singole funzioni precisiamo che le funzioni

$$f(kx), f\left(\frac{1}{x}\right) = -4\cos\left(\frac{1}{x}\right), f(e^x) = -4\cos(e^x) \text{ hanno lo stesso dominio della funzione originaria; le}$$

altre due funzioni hanno come dominio l'insieme dei numeri reali positivi privato dei punti della forma $x=k\pi$, con k naturale diverso da zero.