

Test su equazioni e funzioni goniometriche

Equazioni goniometriche elementari e loro applicazioni

- 1) L'equazione goniometrica $3\sin(2x) + 4 = 0$ non ha soluzioni

V ☐

F ☐

Risposta: Vero. Infatti l'equazione si può scrivere nella forma equivalente $\sin(2x) = -\frac{4}{3}$. La

funzione goniometrica $y = \sin(2x)$ ha come codominio l'intervallo $[-1;1]$ e $-4/3$ non appartiene a detto intervallo.

- 2) L'equazione $\sin(2x) = \sin(x)$ nell'intervallo $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ non ha soluzioni.

V ☐

F ☐

Risposta: Falso.

Le soluzioni dell'equazione sono i valori reali di x tali che $(2x = x + 2k\pi) \vee (2x = \pi - x + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

quindi $(x = 2k\pi) \vee \left(x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Dei valori

indicati $x = \frac{\pi}{3}$ appartiene all'intervallo indicato ed è

l'unico valore che soddisfa l'equazione nell'intervallo; l'equazione nell'intervallo assegnato ammette una soluzione, quindi l'affermazione è falsa. (Figura 1)

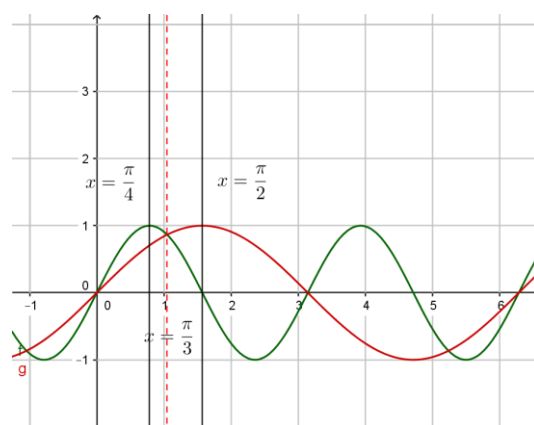


Figura 1

- 3) L'equazione $\sin(3x) = \sin(x)$ nell'intervallo $[0; 2\pi]$ ammette 7 soluzioni.

V ☐

F ☐

Risposta: Vero

Le soluzioni dell'equazione sono i valori reali x tali che $(3x = x + 2k\pi) \vee (3x = \pi - x + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ da

cui si $(x = k\pi) \vee \left(x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. I valori che ricadono nell'intervallo $[0; 2\pi]$ sono $0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4},$

$\pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi$, che sono sette.

- 4) L'equazione $\sin x = \cos x$ nell'intervallo $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$ non ha soluzioni.

V ☐

F ☐

Risposta: Falso.

Trasformando l'equazione come segue $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ si riconosce che le sue soluzioni sono i valori reali $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, quindi nell'intervallo indicato ricade la soluzione $x = \frac{5\pi}{4}$.

- 5) I grafici delle due funzioni goniometriche $f: y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, $g: y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ nell'intervallo $[0; 2\pi]$ hanno quattro punti in comune V ☐ F ☐

Risposta: Vero

Per giustificare la risposta risolviamo l'equazione

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

nell'intervallo assegnato.

L'equazione è soddisfatta dai valori della variabile che verificano la seguente condizione

$$\begin{aligned} &\left(2x - \frac{\pi}{3} = x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \vee \\ &\left(2x - \frac{\pi}{3} = -\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

che elaborata diventa

$$\left(x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi\right) \vee \left(x = \frac{\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}\right), k \in \mathbb{Z}$$

Le soluzioni dell'equazione appartenenti al primo giro (dette **soluzioni principali**) sono i punti del seguente insieme $S_p = \left\{\frac{\pi}{36}; \frac{7\pi}{12}; \frac{25\pi}{36}; \frac{49\pi}{36}\right\}$ e sono effettivamente quattro.

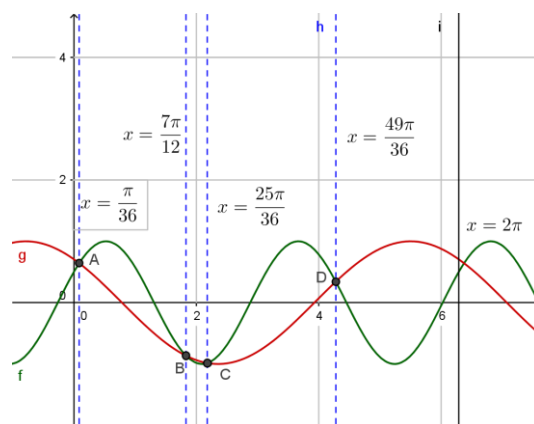


Figura 2

In Figura 2 sono rappresentati i diagrammi delle due funzioni f , g e si evince che nell'intervallo $[0; 2\pi]$ si incontrano nei quattro punti A, B, C, D le cui ascisse sono rispettivamente $\frac{\pi}{36}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{25\pi}{36}$, $\frac{49\pi}{36}$.

- 6) L'equazione $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}(4x + \pi)$ nell'intervallo $[0; 2\pi]$ ammette quattro soluzioni. V ☐ F ☐

Risposta: Vero

Osserviamo intanto che l'equazione si può ridurre alla forma seguente

$$\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}(4x)$$

e questa è soddisfatta dai valori di x che verificano la condizione

$4x = 2x - \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, da cui si ottiene $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Assegnando a k i valori 1, 2, 3, 4 si ricavano le quattro soluzioni principali $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}$.

- 7) Risolvere l'equazione goniometrica $\cos x = -\operatorname{sen} x$ nell'intervallo $[0; 2\pi]$.

Elaborazioni

Trasformiamo l'equazione come segue

$$\cos x = -\operatorname{sen} x \rightarrow \cos x = \operatorname{sen}(-x) \rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}(-x)$$

L'equazione ottenuta è soddisfatta dai valori della variabile tali che

$$\left(\frac{\pi}{2} - x = -x + 2k\pi\right) \vee \left(\frac{\pi}{2} - x = \pi - (-x) + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

La condizione diventa $\left(\frac{\pi}{2} = 2k\pi\right) \vee \left(x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$. L'uguaglianza $\frac{\pi}{2} = 2k\pi$ non può sussistere per alcun valore intero di k , mentre la seconda nell'intervallo assegnato è soddisfatta nei punti $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. L'equazione ammette dunque due soluzioni.

- 8) Determinare le soluzioni dell'equazione $\operatorname{tg}(2x) = \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ nell'intervallo $[0; 2\pi]$.

Elaborazioni

Possiamo trasformare l'equazione come segue

$$\operatorname{tg}(2x) = \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \operatorname{tg}(2x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \rightarrow \operatorname{tg}(2x) = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$$

Quest'equazione è soddisfatta dai valori x tali che $2x = \frac{3\pi}{4} - x + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, quindi dai valori

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \text{ L'insieme delle soluzioni principali è } S_p = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}, \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right\}.$$

- 9) Determinare le soluzioni dell'equazione $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ nell'intervallo $[0; 2\pi]$.

Elaborazioni

Possiamo trasformare l'equazione come segue

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right).$$

L'equazione ottenuta è soddisfatta dai valori x tali che $\frac{\pi}{2} - 3x = \pm\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Analizzando i due casi si ha:

$$\frac{\pi}{2} - 3x = \frac{\pi}{4} - 2x + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi;$$

$$\frac{\pi}{2} - 3x = -\frac{\pi}{4} + 2x + 2k\pi \rightarrow x = \frac{3\pi}{20} + k \cdot \frac{2\pi}{5}.$$

L'insieme delle soluzioni principali dell'equazione è $S_p = \left\{\frac{3\pi}{20}; \frac{\pi}{4}; \frac{11\pi}{20}; \frac{19\pi}{20}; \frac{27\pi}{20}; \frac{7\pi}{4}\right\}$.

- 10) Le due funzioni $f: y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}, g: y = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$ sono coincidenti

V ☐

F ☐

Risposta: Falso

Osserviamo che sussiste la seguente catena di uguaglianze

$\frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{\sin x(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \frac{\sin x(1 + \cos x)}{\sin^2 x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$ solo per i valori di x che soddisfano la condizione di equivalenza $1 + \cos x \neq 0$, quindi se $x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Del resto notiamo che la funzione f ha come dominio $D_f = \{x | x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e la funzione g dominio $D_g = \{x | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, e i due insiemi sono diversi. Precisiamo che nell'insieme intersezione $A = D_f \cap D_g$ le due funzioni assumono gli stessi valori.