

Rappresentazione di funzioni sinusoidali

Le funzioni del tipo

$$f(x) = A \sin(\omega x + \varphi), \text{ con } A \neq 0, \omega \neq 0, \quad (1)$$

sono definite su tutto l'asse reale e sono periodiche con periodo $T = 2\pi/\omega$. Si può rappresentare nel piano cartesiano il diagramma della funzione $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ deducendolo con opportune trasformazioni da quello della funzione di base $y = \sin x$.

Anche per le funzioni

$$g(x) = A \cos(\omega x + \varphi) \quad (2)$$

è possibile rappresentare il diagramma cartesiano sfruttando quello della funzione di base $y = \cos x$. Inoltre, osservato che sussiste la catena di uguaglianze seguente

$$g(x) = A \cos(\omega x + \varphi) = A \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\omega x + \varphi)\right) = A \sin\left(-\omega x + \frac{\pi}{2} - \varphi\right) = -A \sin\left(\omega x + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -A \sin(\omega x + \psi),$$

evidentemente, per la rappresentazione delle funzioni di tipo (2), si potrà fare riferimento alla procedura utilizzata per la rappresentazione delle funzioni di tipo (1), previa trasformazione della forma della funzione per ricondurla al tipo indicato.

Procedura da seguire

- 1) Si rappresenti la sinusoide $\gamma_1 : y = \sin x$ in un intervallo a scelta.
- 2) Si applichi alla curva γ_1 la traslazione lungo l'asse x seguente $\tau_x : (x; y) \rightarrow (x'; y')$, con
$$\begin{cases} x' = x - \varphi \\ y' = y \end{cases}$$
. Operativamente, sostituire nell'equazione $y = \sin x$, x con $x' + \varphi$, y con y' ed eliminare gli apici; in tal modo si ottiene il grafico della funzione $\gamma_2 : y = \sin(x + \varphi)$.
- 3) Sottoporre la curva γ_2 alla dilatazione lungo l'asse x definita da $\delta_x : \begin{cases} x' = \frac{x}{\omega} \\ y' = y \end{cases}$. Operativamente, sostituire nell'equazione $\gamma_2 : y = \sin(x + \varphi)$ ad x il prodotto $\omega x'$, y con y' ed eliminare gli apici. Il grafico ottenuto è quello della funzione $\gamma_3 : y = \sin(\omega x + \varphi)$.
- 4) Applicare alla curva γ_3 la dilatazione lungo l'asse y , $\delta_y : \begin{cases} x' = x \\ y' = Ay \end{cases}$. Operativamente, porre x' in luogo di x e il valore $\frac{y'}{A}$ al posto di y . Eliminare gli apici. Il grafico ottenuto è quello della funzione $y = A \sin(\omega x + \varphi)$.

Esercizi

1) Rappresentare la funzione $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, che ha periodo $T = 2\pi/2 = \pi$.

1.1) Rappresentiamo la funzione $\gamma_1 : y = \sin x$.

1.2) Trasliamo la curva γ_1 a sinistra di $\pi/4$, ottenendo il diagramma γ_2 della funzione

$$\gamma_2 : y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

1.3) Sottoponiamo la curva γ_2 alla dilatazione lungo l'asse x $\delta_x : \begin{cases} x' = \frac{x}{2} \\ y' = y \end{cases}$. Si ottiene il diagramma γ_3

$$\text{della funzione } y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

1.4) Sottoponiamo la curva γ_3 alla dilatazione di fattore 3 lungo l'asse y ; $\delta_y : \begin{cases} x' = x \\ y' = 3y \end{cases}$. La curva

$$\text{ottenuta è il diagramma della funzione } y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

In Figura 1 sono rappresentate le quattro curve $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ riconoscibili dal colore e dallo stile della linea.

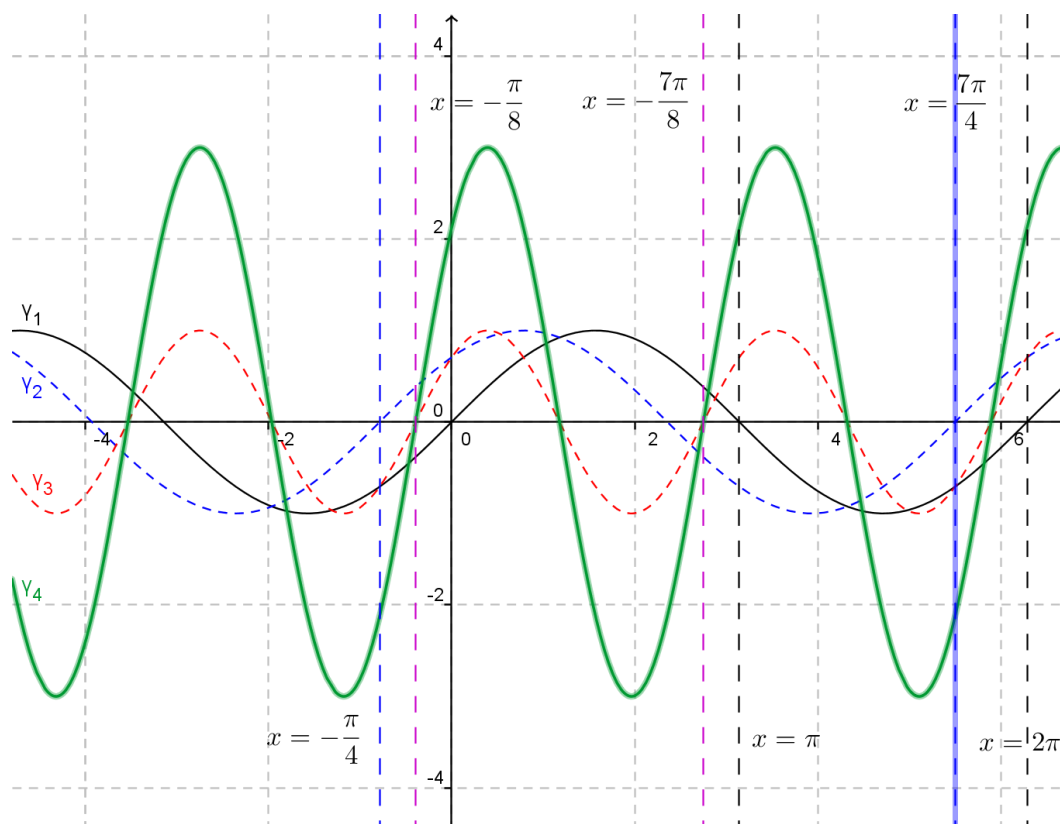


Figura 1

2) Rappresentare la funzione $y = \sqrt{3} \cos x - \sin x - 1$

Procedura

a) Trasformiamo l'espressione della funzione come segue

$$y = \sqrt{3} \cos x - \sin x - 1 \rightarrow y = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) - 1 \rightarrow y = 2 \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \sin x \right) - 1$$

$$\rightarrow y = 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) - 1 \rightarrow y = -2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - 1.$$

b) Rappresentiamo in Figura 2 nell'ordine i grafici delle funzioni

$$\gamma_1 : y = \sin x, \quad \gamma_2 : y = \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right), \quad \gamma_3 : y = -\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right),$$

$$\gamma_4 : y = -2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right), \quad \gamma_5 : y = -2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - 1$$

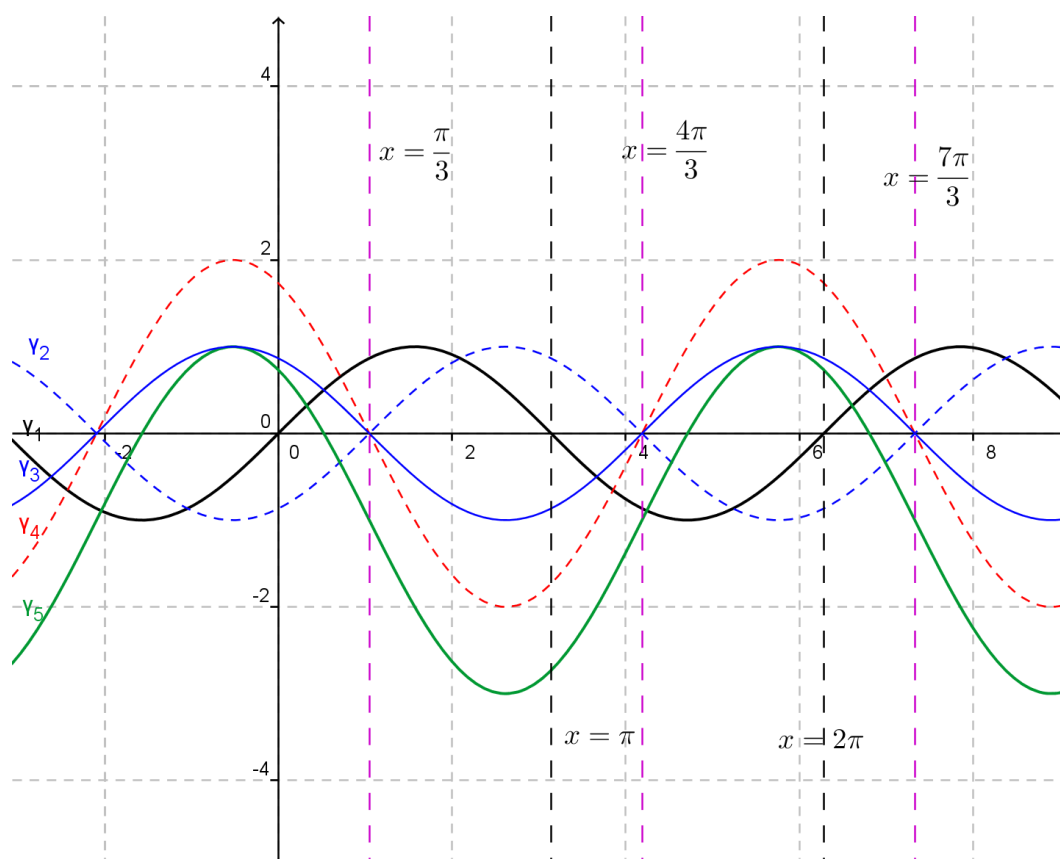


Figura 2