

Esercitazione di goniometria

Operatività con le funzioni circolari inverse

Calcolare i valori delle seguenti espressioni

1) $\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arcsen}\frac{12}{13}\right)$

Soluzione

Posto $\operatorname{arcsen}\frac{12}{13} = \alpha$, ricordando che il

codominio della funzione $\operatorname{arcsen}x$ è l'intervallo

$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, si deduce che $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Notiamo

che $\operatorname{arcsen}\frac{12}{13} = \alpha \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{12}{13}$.

Applicando la formula di duplicazione per $\operatorname{sen}x$ abbiamo

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha.$$

Dall'essere $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ deduciamo che

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13} \text{ e quindi}$$

$$\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arcsen}\frac{12}{13}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{12}{13}\right) \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{5}{13} = \frac{120}{169}$$

*** **

2) $\cos\left(2\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$

Soluzione

$\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{7}}{4} = \alpha \rightarrow \alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$; inoltre dalla definizione di funzione circolare inversa $\operatorname{arcsen}x$

deduciamo che $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Ricordiamo ora che $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$, per cui si ha

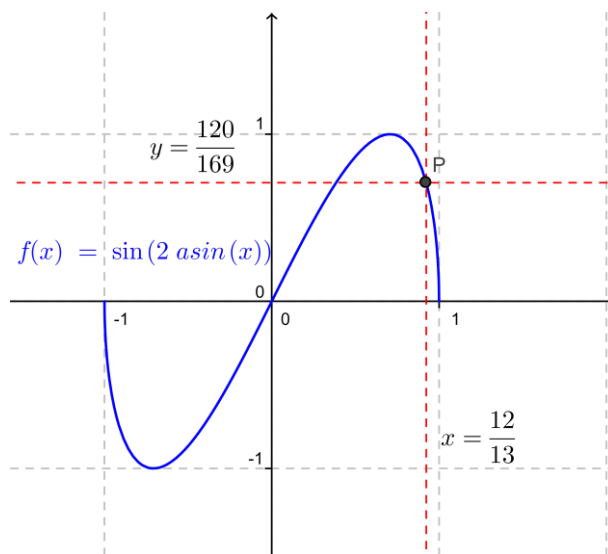


Figura 1

$$\cos\left(2\arcsen\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha =$$

$$1 - 2\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

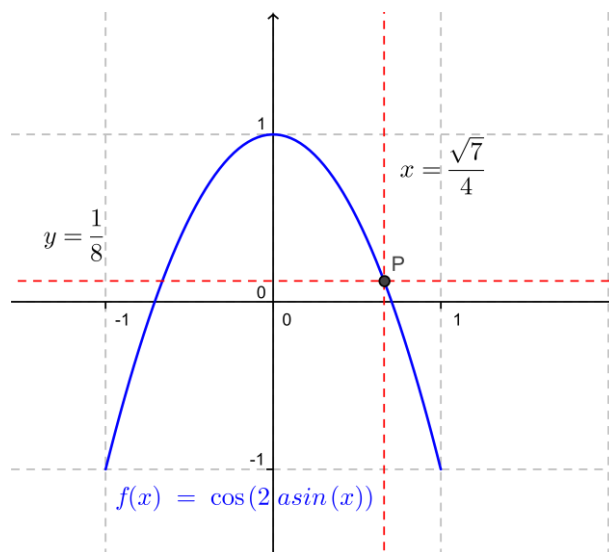


Figura 2

*** **

$$3) \quad \sin\left(\arctg\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)\right)$$

Soluzione

Ricordato che le funzioni $\sin x$ e $\arctg x$ sono dispari possiamo scrivere intanto

$$\sin\left(\arctg\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)\right) = \sin\left(-\arctg\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)\right) = -\sin\left(\arctg\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)\right)$$

A questo punto ricordiamo che il codominio della funzione $\arctg x$ è $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ e che in particolare

$$\arctg\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[.$$

Poniamo ora $\arctg\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) = \alpha$, da cui segue $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. Dalla relazione $\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$,

deduciamo

$$-\sin\left(\arctg\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)\right) = -\sin\alpha = -\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = -\frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\sqrt{1+\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2}} = -\frac{2\sqrt{6}}{5} \cdot \frac{5}{7} = -\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

Concludiamo che $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)\right) = -\frac{2\sqrt{6}}{7}$.

*** **

4) $\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{12}{5}\right)\right)$

Soluzione

La funzione $\cos x$ è pari, mentre $\operatorname{arctg} x$ è dispari e quindi possiamo scrivere

$$\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{12}{5}\right)\right) = \cos\left(-\operatorname{arctg}\left(\frac{12}{5}\right)\right) = \cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{12}{5}\right)\right).$$

Osserviamo che $\operatorname{arctg}\left(\frac{12}{5}\right) \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Posto $\operatorname{arctg}\left(\frac{12}{5}\right) = \alpha \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$. Ancora, per il valore di α in oggetto, risulta

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{12}{5}\right)^2}} = \frac{5}{13}$$

Concludiamo che $\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{12}{5}\right)\right) = \frac{5}{13}$.

*** **

5) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$

Soluzione

Ricordiamo che il codominio della funzione $\arccos x$ è l'intervallo $[0; \pi]$ ed in particolare risulta

$$\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[.$$

Ciò premesso poniamo $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) = \alpha$, dunque $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Per il valore dell'angolo α indicato sussiste la seguente catena di uguaglianze

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2}}{-\frac{4}{5}} =$$

$$\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{3}{4}$$

Si conclude che $\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right) = -\frac{3}{4}$.

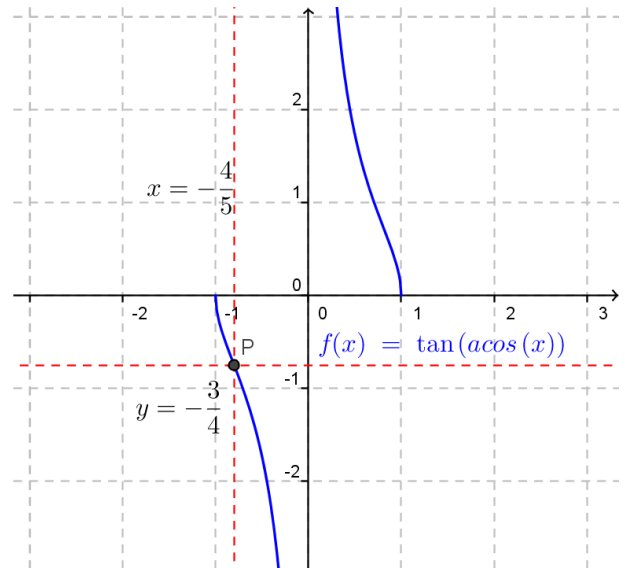


Figura 3