

### **Premessa**

Abbiamo già visto la simulazione del lancio di dadi con *excel*

Vedi: [http://www.matematicamente.it/statistica/prob\\_simu/index.htm](http://www.matematicamente.it/statistica/prob_simu/index.htm)

Ci proponiamo di ottenere risultati “analoghi” usando *DERIVE*.

Il concetto di probabilità “frequentista” è basata sulla definizione di frequenza relativa di un evento.

Si definisce **frequenza relativa** di un evento in  $n$  prove effettuate nelle stesse condizioni, il rapporto fra il numero  $v$  delle prove nelle quali l’evento si è verificato e il numero  $n$  delle prove effettuate:

$$f = \frac{v}{n} \quad \text{con} \quad 0 \leq f \leq 1$$

se  $f=0$  l’evento non si è mai verificato in quelle  $n$  prove;

se  $f=1$  ( $v=n$ ) l’evento si è sempre verificato in quelle  $n$  prove.

Nella nostra simulazione vogliamo verificare la

### **Legge empirica del caso**

In una serie di prove, ripetute un gran numero di volte, eseguite tutte nelle stesse condizioni, la frequenza “tende” ad assumere valori prossimi alla probabilità dell’evento e l’approssimazione è tanto maggiore quanto più numerose sono le prove eseguite.

La legge empirica del caso permette di formulare la seguente

*definizione frequentista di probabilità per eventi ripetibili:*

La probabilità di un evento è la frequenza relativa in un numero “elevato” di prove.

Generalmente non si può dire quante prove siano necessarie; il numero delle prove dipende dal fenomeno in esame.

La simulazione con DERIVE

Marcello Pedone

[www.matematicamente.it](http://www.matematicamente.it)

**Lancio di un dado**

*Per ottenere un vettore in cui sono "simulati" 100 lanci di un dado; basta scrivere il comando:*

```
VECTOR(RANDOM(6) + 1, n, 1, 100)
```

**La funzione:** **RANDOM(n)** richiama il generatore di numeri pseudocasuali. I numeri casuali vengono ricavati dalla variabile di stato per i numeri casuali  $s$ , che viene aggiornata mediante la regola  $2654435721 \cdot s + 1 \pmod{2^{32}}$  ogni volta che viene generato un numero casuale.

**RANDOM(n)** restituisce un intero casuale nell'intervallo  $[0, n)$ . Con **RANDOM(6)**, viene restituito uno dei 6 numeri interi equiprobabili dell'insieme  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ .

*Siccome nel lancio di un dado gli eventi possibili sono  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , si deve calcolare **RANDOM(6)+1**.*

*La sintassi della funzione **VECTOR** è: **VECTOR(espressione, variabile, valore iniziale, valore finale)**.*

**La funzione :**

```
VECTOR(RANDOM(6) + 1, n, 1, 100)
```

*permette di ottenere un vettore in cui sono simulati 100 lanci di un dado. Premendo "=" si ottiene il vettore di 100 elementi, che viene di seguito riportato*

```
[3, 4, 2, 4, 6, 6, 4, 6, 6, 4, 6, 3, 5, 4, 6, 1, 6, 5, 2, 1, 4, 1, 5, 6, 3, 2, 2, 6, 3, 1, 3, 4, 4, 2, 3, 2, 3, 4, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 3, 3, 1, 3, 4, 3, 2, 3, 4, 2, 4, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 4, 6, 1, 1, 1, 3, 4, 4, 4, 3, 4, 6, 1, 3, 1, 1, 5, 6, 6, 1, 1, 6, 1, 5, 6, 2, 2, 3, 2, 6, 4, 6, 2, 5, 6, 1, 1, 3, 2]
```

*per contare quante volte compare il numero 1, il numero 2, ..., il numero 6, si può scrivere:*

```
VECTOR(DIMENSION(SELECT(ELEMENT(VECTOR(RANDOM(6) + 1, n, 1, 100), i) = j, i, 1, DIMENSION(VECTOR(RANDOM(6) + 1, n, 1, 100)))), j, 1, 6)
```

*La funzione **ELEMENT(v, n)** restituisce l'elemento  $n$ -esimo del vettore  $v$ .*

*Ad esempio: **ELEMENT**([a, b, c, d, e, f], 2), restituisce  $b$ .*

*La funzione **SELECT** trova quegli elementi del vettore che soddisfano ad un certo criterio. **SELECT(u, k, v)** essa si semplifica in un vettore costituito dagli elementi  $k$  di  $v$ , per i quali  $u(k)$  è vera. Ad esempio: **SELECT(PRIME(k), k, [3, 5, 7, 9, 11])**, si semplifica in  $[3, 5, 7, 11]$ .*

*La dimensione di un vettore è il numero di elementi del vettore stesso.*

*Con la funzione **DIMENSION(vettore)** calcoliamo la dimensione di un vettore.*

*Esempio: **DIM**([[a, b, c], [1, 2, 3]]) si semplifica in 2 perché la matrice ha 2 righe.*

Per ottenere la probabilità bisogna dividere i numeri precedentemente ottenuti per il numero totale degli eventi ( $n$ ), in questo caso 100.

```
VECTOR( ( DIMENSION(SELECT(ELEMENT(VECTOR(RANDOM(6) + 1, n, 1, 100), i) = j, i, 1, DIMENSION(VECTOR(RANDOM(6) + 1, n, 1, 100)))) ) / 100 , j, 1, 6 )
```

La simulazione con DERIVE  
Marcello Pedone  
[www.matematicamente.it](http://www.matematicamente.it)

si ottiene: [0.18, 0.27, 0.2, 0.2, 0.16, 0.19]

1	0.18
2	0.27
3	0.2
4	0.2
5	0.16
6	0.19

Ripetendo l'esperimento con n=200 otteniamo:

[0.17, 0.215, 0.165, 0.17, 0.155, 0.155]

1	0.17
2	0.215
3	0.165
4	0.17
5	0.155
6	0.155

Ripetendo l'esperimento con n=500 otteniamo:

[0.142, 0.178, 0.194, 0.172, 0.19, 0.166]

1	0.142
2	0.178
3	0.194
4	0.172
5	0.19
6	0.166

Ripetendo l'esperimento con n=1000 otteniamo:

[0.182, 0.162, 0.167, 0.159, 0.183, 0.177]

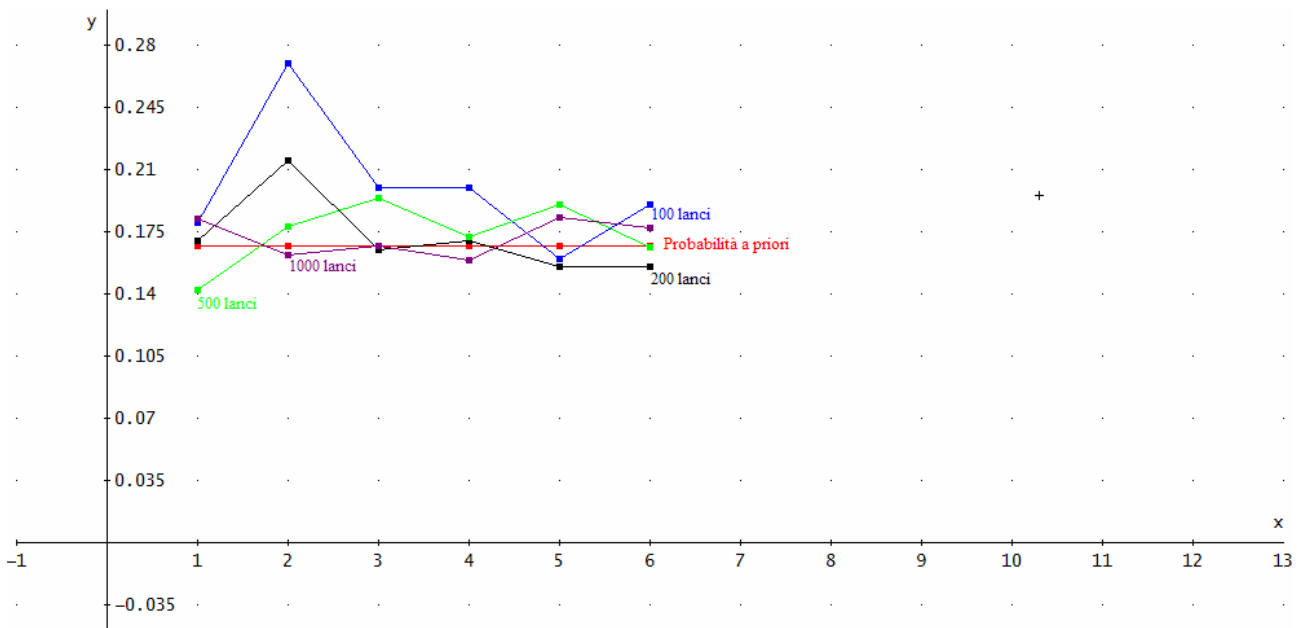
1	0.182
2	0.162
3	0.167
4	0.159
5	0.183
6	0.177

La simulazione con DERIVE

Marcello Pedone

[www.matematicamente.it](http://www.matematicamente.it)

Grafico dei risultati ottenuti nel lancio di un dado.



*Legge empirica del caso*

In una serie di prove, ripetute un gran numero di volte, eseguite tutte nelle stesse condizioni, la frequenza “tende” ad assumere valori prossimi alla probabilità dell’evento e l’approssimazione è tanto maggiore quanto più numerose sono le prove eseguite. CVV

### Lancio di due dadi

*Per ottenere un vettore in cui sono simulati 100 lanci di due dadi; basta scrivere il comando:*

```
VECTOR(RANDOM(6) + RANDOM(6) + 2, n, 1, 100)
```

*Nel lancio di due dadi gli eventi possibili sono { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, quindi si deve calcolare  $RANDOM(6)+RANDOM(6)+2$*

**La funzione :**

```
VECTOR(RANDOM(6) + RANDOM(6) + 2, n, 1, 100)
```

*permette di ottenere un vettore in cui sono simulati 100 lanci di due dadi. Premendo “=” si ottiene il vettore di 100 elementi, che viene di seguito riportato*

```
[7, 6, 12, 10, 10, 9, 9, 7, 11, 3, 5, 11, 5, 8, 4, 7, 6, 5, 7, 11, 11, 11, 6, 4, 7, 5, 6, 5, 3, 5, 5, 7, 2, 7, 8, 7, 7, 4, 6, 12, 2, 7, 11, 4, 5, 10, 8, 11, 2, 5, 9, 8, 7, 11, 8, 8, 5, 7, 10, 10, 6, 6, 5, 7, 8, 3, 12, 12, 8, 8, 11, 6, 10, 10, 10, 9, 7, 5, 11, 8, 4, 9, 7, 5, 5, 8, 7, 7, 5, 7, 6, 6, 6, 8, 8, 11, 3, 5, 5, 11]
```

*per contare quante volte compare la somma “delle facce” dei due dadi è il numero 2, il numero 3, ..., il numero 12; si può scrivere:*

## La simulazione con DERIVE

Marcello Pedone

[www.matematicamente.it](http://www.matematicamente.it)

```
VECTOR(DIMENSION(SELECT(ELEMENT(VECTOR(RANDOM(6) + RANDOM(6) + 2, n, 1, 100), i) = j, i, 1, 1, DIMENSION(VECTOR(RANDOM(6) + RANDOM(6) + 2, n, 1, 100))), j, 2, 12)
```

Per ottenere la probabilità bisogna dividere i numeri precedentemente ottenuti per il numero totale degli eventi (n), in questo caso 100.

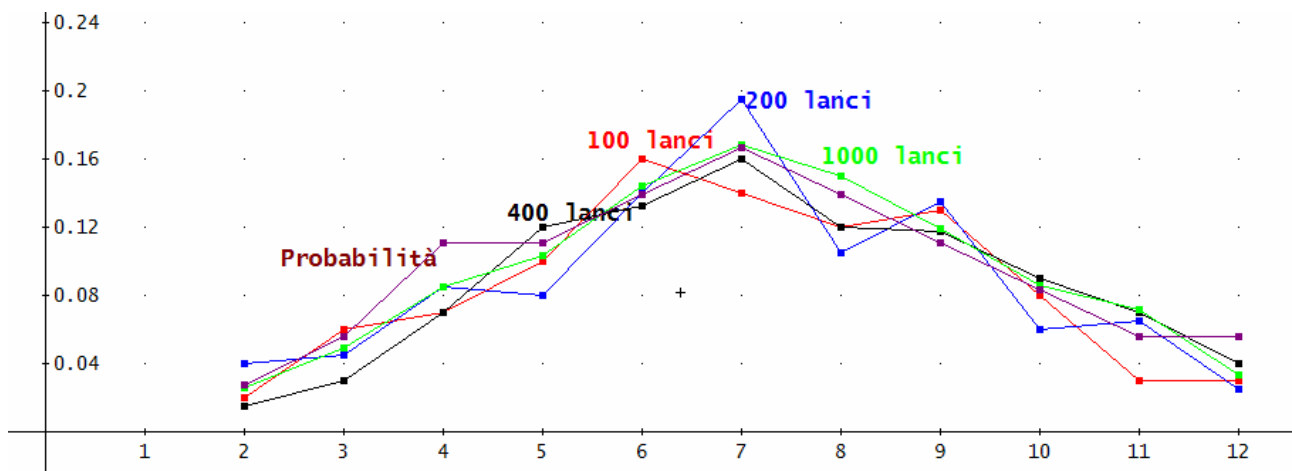
```
VECTOR( ( DIMENSION(SELECT(ELEMENT(VECTOR(RANDOM(6) + RANDOM(6) + 2, n, 1, 100), i) = j, i, 1, DIMENSION(VECTOR(RANDOM(6) + RANDOM(6) + 2, n, 1, 100))), j, 2, 12) / 100 )
```

Si ottiene:

[0.02, 0.06, 0.07, 0.1, 0.16, 0.14, 0.12, 0.13, 0.08, 0.03, 0.03]

2	0.02
3	0.06
4	0.07
5	0.1
6	0.16
7	0.14
8	0.12
9	0.13
10	0.08
11	0.03
12	0.03

Ripetendo l'esperimento effettuando 200,400,1000 lanci si ottiene il grafico seguente:



*Legge empirica del caso*

In una serie di prove, ripetute un gran numero di volte, eseguite tutte nelle stesse condizioni, la frequenza “tende” ad assumere valori prossimi alla probabilità dell’evento e l’approssimazione è tanto maggiore quanto più numerose sono le prove eseguite. CVV

P.S. Il computer può impiegare alcuni minuti per il calcolo con n=1000.

# La simulazione con DERIVE

Marcello Pedone

[www.matematicamente.it](http://www.matematicamente.it)

## Rappresentazione grafica dei risultati ottenuti.

Con la funzione :

```
VECTOR [ VECTOR(x, x, 1, 6),  
VECTOR [  $\frac{\text{DIM}(\text{SELECT}(\text{ELEMENT}(\text{VECTOR}(\text{RANDOM}(6) + 1, n, 1, 100), i) = j, i, 1, \text{DIM}(\text{VECTOR}(\text{RANDOM}(6) + 1, n, 1, 100) \sim$   
100  
)))  
-----, j, 1, 6 ] ]
```

si ottiene (per esempio):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.13 & 0.22 & 0.29 & 0.13 & 0.15 & 0.15 \end{bmatrix}$$

Bisogna costruire la **Matrice trasposta** cioè la matrice risultante dallo scambio tra le righe e le colonne. La trasposizione di uno scalare (o di un vettore di scalari) restituisce l'argomento originale.

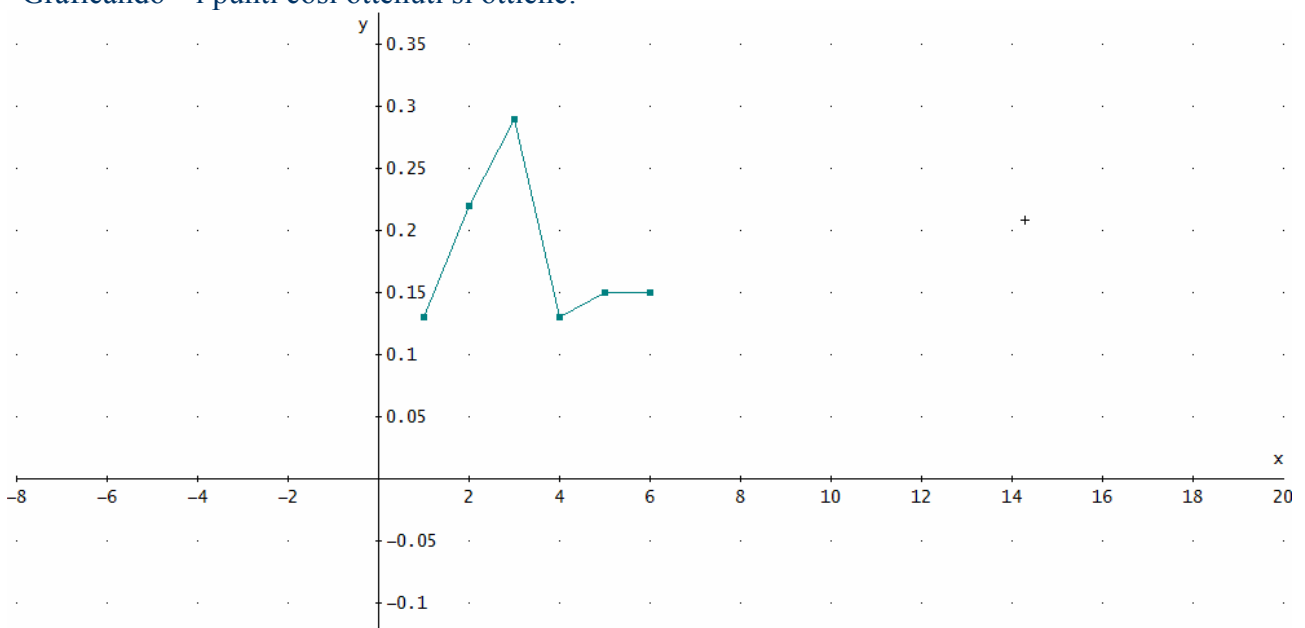
Si deve usare l'operatore postfisso ` (accento grave) per calcolare la trasposta di una matrice. Nel nostro caso:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.13 & 0.22 & 0.29 & 0.13 & 0.15 & 0.15 \end{bmatrix},$$

si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.13 \\ 2 & 0.22 \\ 3 & 0.29 \\ 4 & 0.13 \\ 5 & 0.15 \\ 6 & 0.15 \end{bmatrix}$$

“Graficando” i punti così ottenuti si ottiene:



Per rappresentare la linea continua bisogna fare le scelte rappresentate nella figura seguente:

