

Problema sui fasci di parabole

Considerata l'equazione del fascio di linee

$$y=kx^2+(3-k)x-6k-10$$

precisare cosa rappresenta nel piano cartesiano determinando in particolare le curve generatrici. Precisare le caratteristiche del fascio di curve.

Soluzione

L'equazione rappresenta un fascio di parabole con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate. Si determinano le curve generatrici del fascio scrivendo l'equazione in modo da separare i termini contenenti il parametro k dagli altri. La forma cui si fa riferimento è:

$$y - 3x + 10 + k(-x^2 + x + 6) = 0$$

Le equazioni delle due curve generatrici sono:

$$\gamma_1 : y - 3x + 10 = 0,$$

$$\gamma_2 : -x^2 + x + 6 = 0;$$

γ_1 è una retta, γ_2 rappresenta una coppia di rette, precisamente le rette di equazioni $x-3=0$, $x+2=0$.

Classificazione del fascio

Mettendo a sistema le equazioni delle curve generatrici si determinano le coordinate degli eventuali punti base del fascio. Il sistema è

$$\begin{cases} y - 3x + 10 = 0 \\ -x^2 + x + 6 = 0 \end{cases} \text{ le cui soluzioni}$$

sono i punti di coordinate $(3;-4)$, $(-2;-16)$.

Avendo trovato come punti base due punti distinti si conclude che il fascio di curve è composto da parabole secanti ed i punti dalle quali passano tutte sono $A(3;-4)$, $B(-2;-16)$.

Nella figura riportata sono state rappresentate alcune curve del fascio; in particolare sono rappresentate con colore fucsia le curve generatrici.

Le curve rappresentate corrispondono ai valori interi del parametro da $k=-2$ a $k=8$.

Osservazione

Si noti che il sistema di riferimento cartesiano non è monometrico; la scelta è dettata dalla necessità di una migliore lettura della rappresentazione grafica.

