Università del Salento

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea

La matematica *tange* la realtà: la "Géométrie" sconvolge il Seicento.

Relatore:
Prof. Rizzo Sebastiano

Laureanda:
Romano Anna

Anno Accademico 2010/2011

Classificazione AMS: 51M05 – 01A45

Alla mia famiglia

e in particolare ai miei genitori

Con immenso amore

Indice

Introduzione

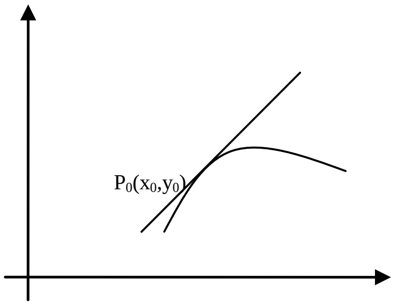
Nel 1637 fu pubblicato in Olanda il celeberrimo *Discours de la méthode* di René Descartes (1596-1650). Uno dei saggi che illustravano il metodo era la *Géométrie*, un'opera rivoluzionaria nella quale algebra e geometria si fondono per dar vita a una nuova disciplina: la geometria analitica. Uno dei punti chiave della *Géométrie* era la caratterizzazione delle curve mediante la loro equazione, grazie alla quale, invece delle singole curve "nominate" della geometria classica, potevano essere studiate intere classi di curve. I problemi relativi cambiarono aspetto: invece di affrontare singoli casi particolari, si trattava ora di trovare metodi generali, applicabili a tutte le curve dotate di equazione.
Tra i problemi della *Géométrie*, quello delle tangenti alle curve assunse subito un posto di rilievo. Descartes lo aveva risolto nel caso di curve algebriche, cioè esprimibili come zeri di un polinomio. Lo stesso risultato era stato ottenuto da Fermat, con un metodo che si applicava ad alcune curve trascendenti e in linea di principio anche a curve la cui equazione conteneva dei radicali, ma che diventava in pratica inservibile al crescere della complessità dell'equazione.
Anche Roberval e Torricelli s'interessarono del problema, che affrontarono però con un metodo diverso, basato sulla generazione cinematica delle curve.
Nei decenni successivi alla pubblicazione della *Géometrié*, i metodi di Descartes e di Fermat vennero raffinati e semplificati ad opera tra gli altri di Jan Hudde, François de Sluse, James Gregory, Isaac Barrow e John Wallis, fino a dar luogo ad un vero e proprio algoritmo di calcolo, senza tuttavia riuscire a superare l'ostacolo costituito dalla presenza di molti radicali nell'equazione della curva.

René Descartes

Pierre de Fermat

La geometria analitica e il problema delle tangenti.

Mentre il problema delle quadrature, e quello connesso dei centri di gravità delle figure, aveva occupato un posto centrale nella matematica classica e rinascimentale, il problema delle tangenti aveva ricevuto solo una moderata attenzione. In effetti, se si eccettua l'opera di Apollonio nella quale si affronta il tracciamento delle tangenti delle sezioni coniche, ben poco si trova nella geometria classica attorno a questo problema. Una delle ragioni, probabilmente la principale di questa mancanza d'interesse, sta in un carattere più volte messo in luce della matematica greca: quello cioè di non riuscire mai a staccarsi dal problema particolare, o meglio dalla figura particolare, per dare metodi generali per classi di figure. Nella geometria greca esistono, come abbiamo accennato, solo curve "nominate", curve cioè definite da proprietà specifiche, che le individuano univocamente. Questa situazione cambia radicalmente nel Seicento. Nei lavori di Valerio e di Cavalieri, per esempio, più che trattare casi particolari si sviluppano metodi generali validi per ampie classi di figure; meglio ancora dove il caso particolare è trattato applicando al problema specifico teoremi generali. Questa tendenza sensibile negli autori citati diventa esplicita e predominante in un'opera che ha segnato più di ogni altra il passaggio dalla geometria classica alla matematica moderna: la Géométrie di René Descartes, opera principale che sarà trattata in tale lavoro. Apparsa per la prima volta nel 1637 come uno dei saggi del Discours de la méthode, la Géométrie rivoluziona completamente lo stesso concetto di curva: non più un oggetto geometrico determinato da proprietà specifiche, ma luogo di punti le cui coordinate soddisfano a un'equazione $\mathcal{F}(x,y)=0$. A queste curve-equazioni Descartes dedica la sua opera, mostrando come esse possano risolvere problemi altrimenti inabbordabili (primo fra tutti il problema di Pappo, che sfidava i geometri da più di un millennio e che tratteremo nel secondo capitolo), come possano essere utilizzate per la soluzione di equazioni algebriche, e infine come potessero essere studiate elaborando metodi generali che si applicassero a tutte indistintamente, senza bisogno di ulteriori precisazioni. Tra le proprietà oggetto di ricerca, un posto particolare occupava la determinazione della retta tangente (o normale), in un suo punto arbitrario P_0 di coordinate (x_0,y_0).



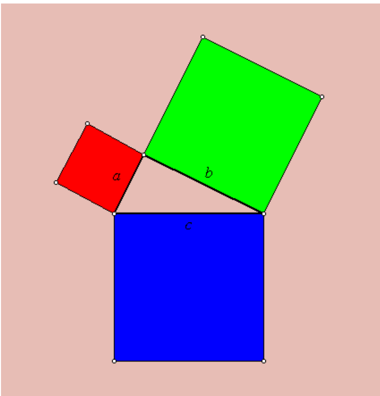
Analizziamo più in dettaglio la “Géométrie”.

La geometria fu pubblicata da Descartes come una delle tre appendici al Discorso sul metodo, assieme a La Diottrica (*La dioptrique*) e Le Meteore (*Les Météores*). Descartes non ha mai chiarito se i tre saggi (appendici) fossero esempi di applicazione del metodo oppure se il metodo fosse un’introduzione ad essi. L'opera in particolare discusse la rappresentazione di un punto di un piano mediante una coppia di numeri reali e la rappresentazione di curva per mezzo di un'equazione. In tal modo i problemi geometrici possono essere tradotti in problemi algebrici e risolti con le regole dell’algebra. In effetti, *La Géométrie* ebbe grande influenza sullo sviluppo del sistema di coordinate cartesiane. Spesso l’opera viene vista unicamente come applicazione dell’algebra alla geometria, ma lo scopo del suo metodo era duplice: da un lato, di liberare la geometria dal ricorso alle figure, di evitare la dipendenza dalle differenze inessenziali tra figura e figura per raggiungere risultati di più ampia generalità; dall’altro di dare un significato alle operazioni algebriche per mezzo di un’interpretazione geometrica.
Il saggio si presenta con una struttura non unitaria e poco omogenea, ma il suo contenuto, nel suo insieme, sia per le soluzioni proposte sia per il linguaggio adottato, è di certo il più avanzato e moderno della prima metà del 1600. Il formalismo algebrico utilizzato è molto simile a quello odierno; in particolare si ha l’uso cartesiano delle prime lettere dell’alfabeto per indicare i parametri e delle ultime per indicare le incognite. Tuttavia, mentre noi concepiamo i parametri e le incognite come numeri, Descartes dava loro un’interpretazione in termini di segmenti.

La Géométrie è divisa in tre libri:

- I problemi che si possono costruire solo con cerchi e linee rette.
- Sulla natura delle linee curve.
- La costruzione dei problemi solidi o più che solidi.

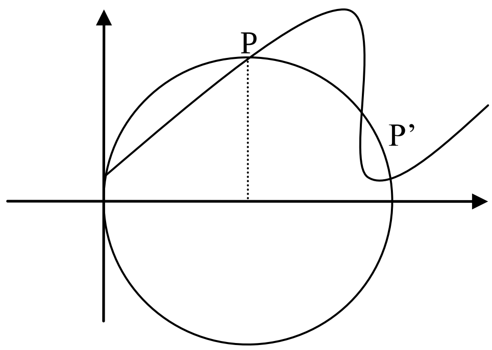
Nel I libro, Descartes, dopo aver posto le basi del metodo delle coordinate e aver dato un’interpretazione delle operazioni algebriche in termini di segmenti, fornisce dettagliate istruzioni sul modo di risolvere equazioni di secondo grado per via geometrica, dando un’interpretazione in tal senso anche per la loro soluzione. Come avevamo detto, enuncia il problema di Pappo che nessuno nell’antichità era stato in grado di risolvere compiutamente e ne inizia la soluzione. Un esempio banale di risoluzione di un’equazione di secondo grado è il Problema di Pitagora.



$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Il II libro è forse quello che contiene i risultati più importanti e più vicini alla concezione moderna della geometria analitica. Descartes espone la scoperta che le equazioni indeterminate in due incognite corrispondono a luoghi geometrici. Distingue con cura le “curve geometriche”, che possono essere rappresentate da equazioni algebriche, come le coniche, la cissoide e la concoide, dalle “curve meccaniche”, come la spirale e la quadratrice che non possono rappresentarsi con tale tipo di equazioni e che oggi sono dette trascendenti. Trova la soluzione al problema di Pappo con 4 rette arrivando a scrivere l'equazione generale di una conica passante per l'origine e specificando le condizioni cui devono soddisfare i coefficienti affinché la conica sia una retta, una parabola, un'ellisse o un'iperbole;

inoltre analizza il caso più semplice del problema di Pappo con 5 rette. Fra i risultati più importanti ottenuti da Descartes e contenuti nel II libro dell’opera, merita una particolare menzione la determinazione generale della normale ad una qualsiasi curva algebrica piana in un suo generico punto e la conseguente determinazione della tangente. Per trovare la normale ad una curva algebrica in un determinato punto P di una curva algebrica, Descartes dice di prendere un punto variabile P’ sulla curva stessa e di determinare l’equazione della circonferenza avente per centro la coordinata sull’asse delle ascisse del punto e passante per i punti P e P’. Ora, annullando il discriminante dell’equazione che determina l’intersezione della circonferenza con la curva, si trova il centro della circonferenza per il quale P’ coincide con P. Trovato il centro, si trovano poi agevolmente la normale e la tangente alla curva nel punto considerato. Il II libro potrebbe concludersi con questa trattazione che mostra il procedimento generale di Descartes per la costruzione di tutti i problemi: intersezione di una circonferenza e una retta per i problemi piani, di una circonferenza e una parabola per i problemi che nel suo linguaggio sono detti solidi, di una circonferenza e di una curva di grado maggiore e così di seguito. L'autore invece, in omaggio all’orientamento preminentemente utilitaristico e tecnico del suo sapere, preferisce terminare il libro con la trattazione sugli ovali, ossia sulle forme che devono assumere i corpi trasparenti, per essere utili al miglioramento della vista.



Il III libro tratta della soluzione delle equazioni di grado superiore al secondo mediante intersezioni di curve. Descartes, partendo dal presupposto che bisogna sapere se l'equazione sia riducibile o meno, insegna come passare da un grado superiore a uno inferiore dell'equazione quando sia nota una radice e che possono darsi tante radici positive quante sono le variazioni di segno nel primo membro, tante negative quante volte i segni + e – si susseguono (regola dei segni di Cartesio). Dà pure alcune regole che riguardano l'eliminazione nell'equazione del secondo termine o la reintroduzione di un termine mancante. Posto ciò, affronta i problemi le cui soluzioni dipendono da equazioni di terzo grado e oltre; per questo, prima si sofferma sulla soluzione delle equazioni di terzo grado e subito dopo su quelle di quarto grado, che risolve riducendone il grado, o altrimenti applicando il metodo dei coefficienti indeterminati che gli consente di ridurre equazioni di quarto grado ad un prodotto di equazioni di secondo grado. A causa di un'affrettata generalizzazione, Descartes fu indotto a pensare di aver trovato erroneamente la soluzione di equazioni superiori al quarto.

La Géométrie, pur essendo dedicata interamente all'interazione tra algebra e geometria, è ben lontana dalla geometria analitica in uso oggi. Descartes non fa un uso sistematico di coordinate ortogonali, ma spesso utilizza coordinate oblique; inoltre non fa uso di ascisse negative e non presenta nessuna curva tracciata direttamente a partire dalla sua equazione. Il problema del tracciamento della tangente ad una curva si trova nella *Géométrie* sotto la forma equivalente del tracciamento della normale. La tecnica usata da Descartes è quella di considerare un cerchio di centro variabile su uno degli assi e di imporre la condizione algebrica che il cerchio abbia due intersezioni coincidenti con la curva nel punto di tangenza.

Descartes inoltre non fece molto per rendere leggibile l'opera ai suoi contemporanei, sia per la struttura scelta sia per i simboli e i calcoli utilizzati; egli era talmente sicuro dell'efficacia del proprio metodo, da scrivere che non si sofferma a «spiegare minutamente» tutte le questioni, solo per lasciare ai posteri la soddisfazione di «apprenderle da sé». Continua poi scrivendo «Ed io spero che i nostri nipoti mi saranno grati, non solo delle cose che io ho spiegato, ma anche di quelle che volontariamente ho omesso, allo scopo di lasciar loro il piacere di inventarle». Si tratta di un'oscurità voluta, perché legata a impostazioni che si ritrovano in tutti gli scritti cartesiani, *Discorso* compreso; tuttavia questo non

toglie a Descartes il grande merito di aver avvicinato due scienze, aritmetica (algebra) e geometria, che un'antica e solida tradizione, fondata su Aristotele, aveva sempre tenuto separate.
In una direzione analoga, utilizzando un'algebra di tipo vieto, si muove anche Pierre de Fermat (1601-1665), che giunge indipendentemente all'identificazione di equazioni e luoghi geometrici. Dopo la pubblicazione della *Géométrie*, Fermat in una lettera a Mersenne, corrispondente di Descartes e di molti scienziati dell'epoca, espone un suo metodo per trovare i massimi e i minimi. Osservando che la differenza tra una curva e la sua tangente ha nel punto di tangenza un minimo (o un massimo), di tale metodo egli si serve per la determinazione delle tangenti ad una curva. Mentre al centro della tecnica cartesiana c'è l'equazione della curva, per Fermat il punto di partenza è l'*adequazione*, una relazione che si ottiene scrivendo la proprietà caratteristica della curva non per i punti di questa, ma per i punti sulla tangente. In questo modo si ottiene una relazione approssimata (l'adequazione) che diventa un'equazione se il punto sulla tangente coincide con quello di contatto. Di conseguenza il metodo di Fermat è più generale di quello di Descartes e consente di trattare oltre alle curve algebriche anche tutte le curve trascendenti allora conosciute. Il metodo trova la prima pubblicazione nel quinto volume del *Supplementum Cursus Mathematici* (1642) scritto da Herigone e viene stampato come *Methodus ad disquirendam maximam et minima* solo nel 1679.
I metodi di Descartes e di Fermat si applicano ovviamente solo a equazioni polinomiali o a esse riconducibili, come del resto sono sempre le equazioni delle curve considerate, e divengono in pratica inservibili al crescere della complessità dell'equazione. Un metodo diverso, in cui la tangente è determinata con considerazioni cinematiche sulla curva, viene usato da Gilles Personnes de Roberval (1602-1675) e reso noto nel 1644 da Mersenne. Nello stesso anno Torricelli pubblica i suoi *Opera geometrica* che contengono tecniche molto simili. Con il metodo cinematico vengono determinate le tangenti a parabole di ordine superiore, alla spirale, alla cicloide. Nei decenni successivi il metodo analitico dà origine a una serie di regole per il calcolo delle tangenti come nelle opere di Hudde, Sluse, Gregory, Barrow, Wallis.

Capitolo I

I metodi di Descartes, De Beaune e Fermat a confronto.

In questo capitolo, approfondirò gli argomenti trattati da Descartes nel secondo libro.

In particolare vediamo di calcolare la tangente all'iperbole di equazione $xy = 1$ applicando il metodo di Descartes. Questi, per giungere alla tesi, costruisce una circonferenza tangente all'iperbole.

Consideriamo, dunque, oltre all'iperbole un cerchio di centro v e raggio s:

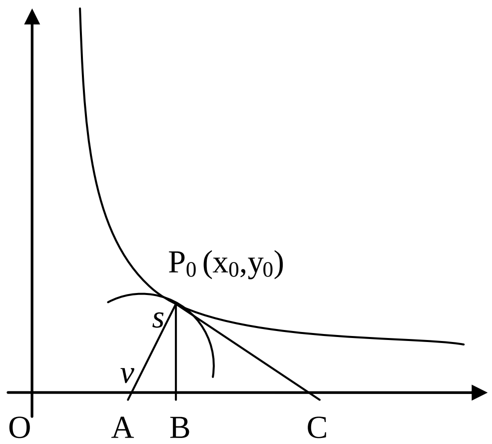


Figura 1.1

Eliminando la y dal sistema costituito dall'equazione dell'iperbole e da quella del cerchio otteniamo:

$$(1.1) \qquad \begin{cases} xy = 1 \\ (x - v)^2 + y^2 = s^2 \end{cases}$$

E moltiplicando per x^2 si ha:

$x^2(x^2 - 2vx + v^2) + 1 - s^2x^2 = 0$

Quest'ultima equazione, per quanto detto nell'introduzione, deve avere una radice doppia per $x = x_0$, e dunque deve risultare:

$x^2(x^2 - 2vx + v^2) + 1 - s^2x^2 = (x - x_0)^2(ax^2 + bx + c).$

Sviluppando, ora, ambo i membri e raccogliendo i termini con la stessa potenza si ottiene:

$x^4 - 2vx^3 + (v^2 - s^2)x^2 + 1 = ax^4 + (b - 2x_0a)x^3 + (c + ax_0^2 - 2bx_0)x^2 + (bx_0^2 - 2cx_0)x + cx_0^2$

e dunque:

$$(1.2) \qquad \begin{cases} a = 1 \\ 2ax_0 - b = 2v \\ c + ax_0^2 - 2bx_0 = v^2 - s^2 \\ bx_0 - 2c = 0 \\ cx_0^2 = 1 \end{cases}$$

e da quest'ultima equazione si ha:

$c = \dfrac{1}{x_0^2} = y_0^2$ e dunque a ritroso segue:

$b = \dfrac{2}{x_0^2} = 2y_0^2$.

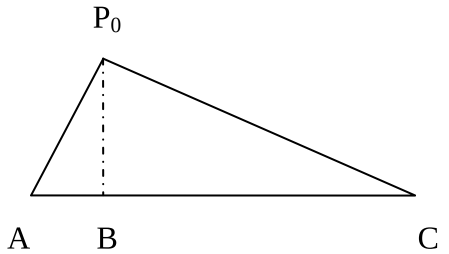
Facciamo notare ora che inserendo tal valore nella seconda equazione e ricordando che $a = 1$, si trova:

$v = x_0 - y_0^3$.

Osserviamo ora che l'unico dato incognito è il valore di s, ma ai nostri fini questo calcolo è irrilevante.

Ora, riprendendo la Figura 1.1, definiamo OA = v, OB = x_0, $BP_0 = y_0$ e pertanto si ottiene AB = $x_0 - v = y_0^3$. Di conseguenza i triangoli ABP_0 e P_0BC sono simili, e dunque è possibile implementare l'equazione del 2° Teorema di Euclide, ottenendo:

$BC : BP_0 = BP_0 : AB$



dalla quale si giunge ad avere:

$$BC = \frac{BP_0^{\ 2}}{AB} = \frac{y_0^{\ 2}}{y_0^{\ 3}} = \frac{1}{y_0} = x_0 \ .$$

Come accennato nella presentazione, anche De Beaune si cimenta nella ricerca delle tangenti alle curve di equazione $\mathcal{F}(x,y) = 0$.

A differenza di Descartes, quest'ultimo al posto della circonferenza tangente considera la retta tangente alla curva; pertanto considerando sempre il caso dell'iperbole, abbiamo da risolvere il sistema seguente:

$$(1.3) \qquad \begin{cases} xy = 1 \\ y = mx + c \end{cases}$$

eliminando adesso la y ed esprimendo il sistema nella sola funzione della x, si ha:

$mx^2 + cx - 1 = 0$

e procedendo sulla stessa strada del metodo precedente e dovendo avere una radice doppia in x_0 dovrà verificare l'identità:

$mx^2 + cx - 1 = a(x - x_0)^2$.

Sfruttando ora, il Principio di identità dei polinomi e uguagliando pertanto i coefficienti delle varie potenze si trova:

$$(1.4) \qquad \begin{cases} a = m \\ -2ax_0 = c \\ ax_0^2 = -1 \end{cases}$$

dalla quale sono ora facilmente ricavabile i valori:

$a = p = -\frac{1}{x_0^{\ 2}} = -y_0^{\ 2}$ e

$c = -2ax_0 = 2y_0$.

L'equazione della retta tangente sarà dunque:

$y = 2y_0 - y_0^2 x$.

Tale retta incontrerà l'asse delle x nel punto C di ascissa OC = $2x_0$; poiché OB = x_0, si avrà allora BC = x_0, in accordo con il risultato ottenuto in precedenza.

Mettiamo ora a confronto con i due metodi trattati un terzo metodo, quello di Fermat, tipico esempio di metodo che si muove su un terreno misto tra la geometria classica e la geometria analitica.

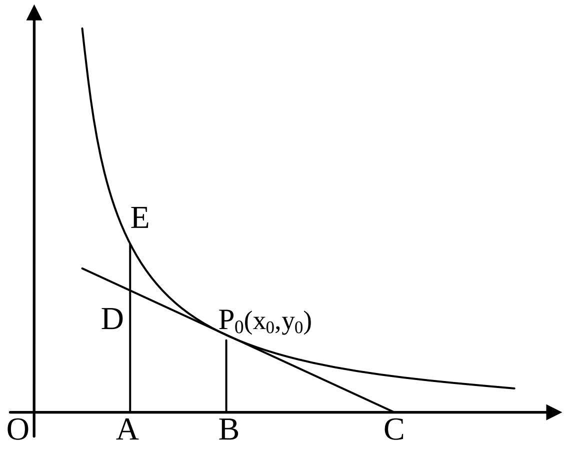


Figura 1.2

Partiamo sempre dall'equazione dell'iperbole $xy = 1$, che scritta in termini di segmenti diventa $OB*BP_0 = 1$.

Sia C il punto in cui la tangente incontra l'asse delle ascisse; per semplicità, utilizzando le notazioni seguite da Viète, matematico noto soprattutto per l'introduzione di notazioni algebriche sintetiche capaci di rendere gli sviluppi deduttivi più compatti e più stringenti, segnalando le incognite e le variabili con le vocali e le quantità note con le consonanti, indichiamo BC = *a*, e AB = *e*.

Il metodo di adequazione di Fermat fa sì che si scriva la proprietà caratteristica dell'iperbole relativamente al punto D sulla tangente e non al punto E sulla curva considerata. Si avrà allora (1') $OA*AD \approx 1$.

D'altra parte, riprendendo le proprietà dei triangoli simili, in particolare il secondo criterio di similitudine e applicandolo ai triangoli ACD e P_0BC, risulta:

$AD : P_0B = AC : BC$ da cui:

$$AD = P_0B * \frac{AC}{BC} = y_0 * \frac{a+e}{a}.$$

Sostituendo tale valore nella (1') avremo:

$$(x_0 - e) * y_0 * \frac{a+e}{a} \approx 1$$

E ricordando infine l'equazione dell'iperbole riferita al punto (x_0,y_0): $x_0y_0 = 1$, possiamo scrivere:

$$\frac{e}{a} - e * y_0 - e^2 * \frac{y_0}{a} \approx 0$$

arrivando all'approssimazione:

$1 - a * y_0 - e * y_0 \approx 0$ dopo aver diviso per e e moltiplicato per a.

Se ora si pone $e = 0$, quest'ultima adequazione diventa un'equazione che fornisce il valore di a:

$$a = \frac{1}{y_0} = x_0$$

ancora una volta in sintonia con i risultati dei due metodi precedenti.

Il metodo di eliminazione di Fermat.

Fermat, inoltre, ha introdotto un metodo di eliminazione di una variabile tra due equazioni, passo questo, essenziale del metodo delle tangenti di Descartes. Infatti ricordando il primo metodo avevamo due equazioni: quella relativa alla curva di cui si vuole trovare la tangente $\mathcal{F}(x,y) = 0$, e quella inerente alla circonferenza tangente, di centro $(v,0)$ sull'asse delle ascisse e raggio s : $(x - v)^2 + y^2 = s^2$.

Ma come si procede?

Proviamo ad illustrare i passaggi e il metodo stesso con un esempio; supponiamo, dunque, di avere una curva di equazione:

(1.1.0) $\quad xy^4 - x^2 + x^3y - 4x^2y^3 + 2 = 0$

e l'equazione della circonferenza (1.1.1) $(x - v)^2 + y^2 = s^2$.

Il primo passo da fare è portare al secondo membro dell'equazione della curva tutti i termini che contengono potenze dispari della y, lasciando al primo membro gli altri, ottenendo:

(1.1.2) $\quad xy^4 - x^2 + 2 = -x^3y + 4x^2y^3$.

Notiamo ora che al secondo membro si può raccogliere la y, rendendo tutte le rimanenti potenze di questa variabile di ordine pari:

(1.1.3) $\quad xy^4 - x^2 + 2 = y(-x^3 + 4x^2y^2)$

Per rendere di ordine pari, completamente tutte le potenze della y, si elevano entrambi i membri al quadrato, giungendo alla possibilità di ricavare il termine in

y^2 dall'equazione della circonferenza, eliminando così la y sostituendolo nell'equazione (1.1.3).

Osserviamo, comunque, che il metodo di Cartesio funziona grazie al fatto che una delle equazioni utilizzate, in particolare quella della circonferenza, consente di ricavare esplicitamente se non la y (cosa che avviene nel metodo di De Beaune, considerando la retta tangente) almeno una sua potenza pari.

Proviamo adesso, a sviluppare un discorso in generale. Supponiamo di avere un sistema di due equazioni in un certo numero di incognite:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(x,y,z,\ldots) = 0 \\ \mathcal{G}(x,y,z,\ldots) = 0, \end{cases}$$

con ovviamente $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due polinomi nelle variabili $x, y, z, \ldots$ In ogni caso è possibile eliminare una delle incognite presenti e ridursi ad un'equazione composta dalle rimanenti grazie al metodo ideato da Pierre Fermat.

Ipotizziamo, per economia di scrittura, di avere solo due incognite x e y:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(x,y) = 0 \\ \mathcal{G}(x,y) = 0 \end{cases}$$

e decidiamo di voler eliminare la x. Così come avevamo proceduto nel particolare, procediamo nel generale: manteniamo al primo membro tutti i termini contenenti la x e portiamo al secondo membro quelli che non la contengono.

$$\begin{cases} \mathcal{H}(x,y) = \mathcal{K}(y) \\ \mathcal{M}(x,y) = \mathcal{N}(y) \end{cases}$$

Possiamo ora raccogliere una x al primo membro e indicando con F il massimo grado della x nel polinomio $\mathcal{F}(x,y)$, e con G il massimo grado della x nel polinomio $\mathcal{G}(x,y)$ supponendo che $F \geq G$, si avrà che il massimo grado della x nei polinomi $\mathcal{H}$ e $\mathcal{M}$ sarà rispettivamente F – 1 e G – 1 ottenendo:

$$\begin{cases} \mathcal{X}{*}\mathcal{H}(x,y) = \mathcal{K}(y) \\ \mathcal{X}{*}\mathcal{M}(x,y) = \mathcal{N}(y) \end{cases}$$

dalle quali moltiplicando le due equazioni a croce e dividendo per x si giunge alla:

$\mathcal{H}(x,y) * \mathcal{N}(y) = \mathcal{M}(x,y) * \mathcal{K}(y).$

Notiamo che in questa equazione la x compare alla potenza F – 1 al primo membro e alla potenza G – 1 al secondo membro e dato che si era supposto che $F \geq G$, il massimo grado della x sarà dunque F – 1.

Consideriamo ora il nuovo sistema:

$$\begin{cases} \mathcal{H}(x,y) * \mathcal{N}(y) = \mathcal{M}(x,y) * \mathcal{K}(y) \\ x * \mathcal{M}(x,y) = \mathcal{N}(y) \end{cases}$$

Per quanto precedentemente notato, il massimo grado della x nelle due equazioni sarà rispettivamente F – 1 e G. Ora se F era maggiore di G, abbiamo diminuito di uno il grado complessivo della x nel sistema; se invece era F = G, possiamo ripetere quanto fatto sopra a ruoli scambiati, ossia F – 1 < G, trovando al posto della seconda una nuova equazione di grado G – 1 nella x. In ogni caso, dopo pochi passaggi, uno o due, il grado complessivo della x nel sistema si sarà abbassato di uno. Ripetendo più volte tale procedimento, arriveremo ad un sistema nel quale una delle due equazioni sarà di primo grado nella x, cioè sarà del tipo:

$x * \mathcal{A}(y) = \mathcal{B}(y)$

con $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ polinomi nella sola y. Possiamo pertanto ricavare:

$$x = \frac{B(y)}{A(y)}.$$

Sostituendo tale valore della x nell'equazione rimanente possiamo imbatterci nel caso in cui la x compare al grado m, pertanto moltiplicando per $\mathcal{A}(y)^m$ si ottiene in conclusione un'equazione del tipo:

$C(y) = 0$

dove C è un polinomio nella sola y.

Abbiamo così eliminato la x dal sistema originale.

Notiamo però che il fatto che l'ipotesi di partenza, ossia che le variabili fossero solo due, non è mai entrata nel nostro ragionamento, riflessione che si basava sulla considerazione del grado della sola variabile x. Pertanto, se abbiamo un sistema di due equazioni in un numero qualsiasi di variabili, è possibile eliminarne una, ad esempio la x, riducendosi a una sola equazione in una variabile in meno. Se poi, le equazioni sono k e le variabili $m \geq k$, si possono considerare due sole equazioni e da queste ricavare la x in funzione delle altre variabili:

$$x = \frac{B(y, z, ...)}{A(y, z, ...)}$$

e introdurre il valore così trovato nelle rimanenti equazioni. Moltiplicando ora, ognuna di queste per un'opportuna potenza del denominatore, si trova un nuovo sistema con un'incognita e un'equazione di meno. Così proseguendo, si eliminano ad ogni passo un'equazione e un'incognita, arrivando all'ultimo gradino con una sola equazione in m-k+1 incognite.

A questo punto credo sia chiaro il legame con il problema delle tangenti: il metodo appena illustrato, conosciuto grazie a Fermat, consente di eliminare in un sistema qualsiasi di equazioni algebriche una o più variabili, in particolare è usato nel nostro caso per eliminare i radicali dall'equazione della curva per la quale si calcola la tangente.

Anche ora, in alcuni casi semplici, l'eliminazione è immediata o quasi. Dimostriamolo con un esempio; supponiamo di avere l'equazione del tipo:

$$x + \sqrt{1 + xy} = 2 - \sqrt{x - y}$$

e separando i radicali dal resto dei termini, avremo:

$$\sqrt{x - y} + \sqrt{1 + xy} = 2 - x .$$

Elevando ambo i membri al quadrato si ottiene:

$$x - y + 1 + xy + 2\sqrt{(x - y)(1 + xy)} = (2 - x)^2$$

Ordinando ed elevando nuovamente al quadrato giungiamo alla:

$$4(x - y)(1 + xy) = [(2 - x)^2 - x + y - 1 - xy]^2$$

dalla quale le radici sono completamente eliminate.

Purtroppo tale metodo ha delle lacune, funziona solo quando sono presenti poche radici, ossia dalle tre alle quattro. Un esempio d'inapplicabilità del metodo è dato dall'equazione proposta da Leibniz:

(1.1.4) $$a + bx\sqrt{y^2 + b\sqrt[3]{1 + y}} + hyx^2\sqrt{y^2 + y\sqrt{1 - y}} = 0$$

In questo caso però è possibile comunque utilizzare il metodo di eliminazione di Fermat con profitto. Iniziamo ad assegnare un nome a ognuna delle radici presente nell'equazione (1.1.4):

(1.1.5) $z = \sqrt[3]{1+y}$ ossia $z^3 = 1+y$,

(1.1.6) $w = \sqrt{1-y}$ ossia $w^2 = 1-y$,

(1.1.7) $u = \sqrt{y^2+bz}$ ossia $u^2 = y^2+bz$,

(1.1.8) $v = \sqrt{y^2+yw}$ ossia $v^2 = y^2+yw$,

l'equazione si può riscrivere:

(1.1.9) $a+bxu+hyx^2v=0$

Si può ora usare il metodo di Fermat per eliminare le variabili ausiliarie *z, w, u* e *v* dal sistema costituito dalle equazioni (1.1.5), (1.1.6), (1.1.7), (1.1.8) e (1.1.9) arrivando a una sola equazione del tipo $\mathcal{F}(x,y) = 0$ nelle sole variabili *x* e *y*. Le radici sono così completamente eliminate.

Le coordinate bipolari.

Osserviamo che tutto il discorso e tutti i calcoli fatti finora sono stati basati sull'utilizzo delle coordinate cartesiane; ma è sicuramente possibile utilizzare coordinate diverse e giungere agli stessi risultati. Iniziamo col definire e ad avvalerci pertanto delle coordinate *bipolari*.

Il metodo di Cartesio richiede che la curva sia descritta per mezzo di un'equazione $\mathcal{F}(x,y)=0$, dove $\mathcal{F}(x,y)$ è un polinomio nelle variabili x e y, le quali individuano un punto P del piano. Osserviamo che invece delle coordinate cartesiane (x,y) è possibile considerare come variabili le distanze *d* e *z* tra P e due punti fissati O e A del piano suddetto.

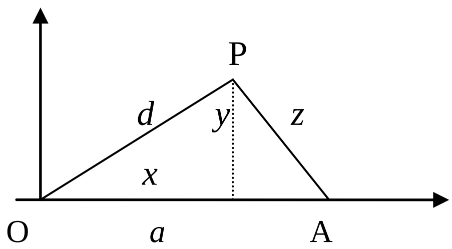


Figura 1.3

Le relazioni tra le coordinate cartesiane (x,y) e le coordinate (d,z), che sono chiamate **bipolari**, ci consentono di scrivere il seguente sistema:

$$\text{(1.5)} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = d^2 \\ (a - x)^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

dal quale eliminando la y si ottiene la relazione $(a - x)^2 - x^2 = z^2 - d^2$ e sviluppando si trova $a^2 - 2ax = z^2 - d^2$, e dunque

$$x = \frac{a^2 + d^2 - z^2}{2a}$$

A questo punto la seconda variabile y si ricava dalla prima o seconda equazione del sistema (1.5). Notiamo che se la variabile x è univocamente determinata da d e z, la y può assumere sia segno positivo sia segno negativo, di conseguenza possiamo concludere che le coordinate bipolari d e z individuano due punti, P e il simmetrico P' rispetto all'asse delle x che si trova alla stessa distanza da O e da A. Per convenzione, pertanto, si pone che le coordinate bipolari rappresentino univocamente i punti del semipiano superiore; dunque una qualsiasi curva di tale semipiano può essere descritta da un'equazione $\mathcal{F}(d,z)=0$ e dunque il metodo di Descartes è applicabile in questo caso.

Ricordiamo che il metodo richiedeva di trovare la circonferenza di centro nel punto (v,0) e tangente all'iperbole di equazione $xy = 1$. Riprendiamo l'equazione della circonferenza dunque di centro (v,0) e raggio s:

$$(x - v)^2 + y^2 = s^2$$

e trasformiamola in un'equazione in coordinate bipolari; sviluppiamo e sostituiamo a tale scopo, alle variabili x e y i loro valori tramite d e z, ricordando anzitutto che $x^2+y^2 = d^2$. Otteniamo pertanto:

$$d^2 - v * \frac{a^2 + d^2 - z^2}{a} + v^2 = s^2$$

e in definitiva:

$$d^2\left(1 - \frac{v}{a}\right) + z^2 * \frac{v}{a} = s^2 - v^2 + av$$

che altro non è che l'equazione della circonferenza cercata.

A questo punto, secondo il metodo di Descartes, per trovare la circonferenza tangente in un punto (d_0,z_0) si deve imporre che la circonferenza e la curva abbiano un'intersezione doppia nel punto dato; quindi se l'equazione della curva è $\mathcal{F}(d,z) = 0$, si eliminerà una delle variabili, ad esempio la z, dal sistema:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(d,z) = 0 \\ d^2\left(1-\dfrac{v}{a}\right)+z^2 * \dfrac{v}{a} = s^2 - v^2 + av \end{cases}$$

Se $\mathcal{G}(d) = 0$ è l'equazione risultante, il polinomio $\mathcal{G}(d)$ deve avere una radice doppia nel punto d_0, e quindi deve essere della forma:

$$G(d) = (d - d_0)^2 * R(d)$$

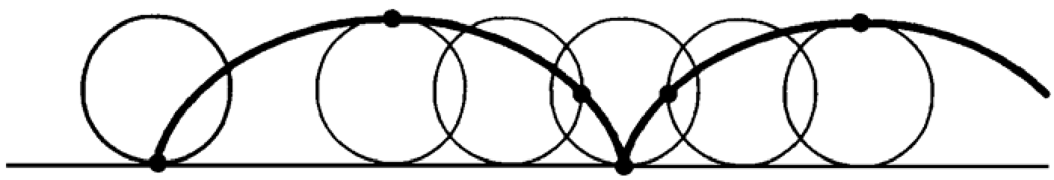
e ora non bisogna fare altro che procedere esattamente come si procedeva nel caso delle coordinate cartesiane, giungendo allo stesso risultato.

Capitolo II

In questo capitolo ci occuperemo più che altro di applicazioni di quanto descritto nel primo capitolo. Tratteremo in particolare la cicloide, la brachistocrona e accenneremo, come promesso, al Problema di Pappo.

La cicloide.

Lo studio della cicloide interessò tutti i matematici della prima metà del Seicento: Pur non essendo una curva di difficile concezione, sembra che la cicloide non sia venuta alla luce fino al XVI secolo. Fu Pascal il primo a scoprirne le innumerevoli proprietà e a meravigliarsi che gli antichi greci l´avessero ignorata, anche se Giamblico (filosofo greco del III secolo d.C.) sembra attribuire una curva simile a Carpo d´Antochia una curva "a doppio movimento" inventata per quadrare il cerchio. Tutto ciò non basta ad annoverare la curva tra quelle conosciute nell´antichità. Mersenne ne diede la prima definizione documentata; nei primi del 1600, Galileo Galilei, il quale fu il primo ad attribuirgli il nome che oggi le diamo, congetturò che l’area della figura racchiusa fosse tre volte quella del cerchio che la genera. Nel 1634 Roberval risolse il problema dell´area compresa tra un arco della curva (da lui chiamata trocoide dal greco *trocos* = ruota) e la base, che aveva visto impegnati per circa quaranta anni Torricelli e appunto il suddetto Galileo; Cartesio e Fermat trovarono le tangenti alla cicloide, ma fu Pascal, come detto, tornato a occuparsi di matematica dopo un lungo periodo in cui si dedicò a religione e filosofia, a risvegliare grande interesse nella curva (da lui chiamata roulette) proponendo diverse sfide matematiche riguardanti la cicloide, a cui parteciparono i più grandi matematici dell´epoca: Wallis, Sluze, Fermat, Huygens, Ricci. In seguito, scienziati del calibro dei fratelli Bernoulli, Leibniz e Newton trovarono per la curva famosissime proprietà matematiche e fisiche.



Iniziamo col descrivere questa curva.

Consideriamo un cerchio di raggio R che partendo dal punto A rotoli senza strisciare sulla retta AD. Il punto B, che inizialmente coincide con A, descrive una curva ABD detta *cicloide*. In un giro, la ruota avrà percorso un cammino pari alla sua circonferenza, e quindi la base AD della cicloide misura $2\pi R$.

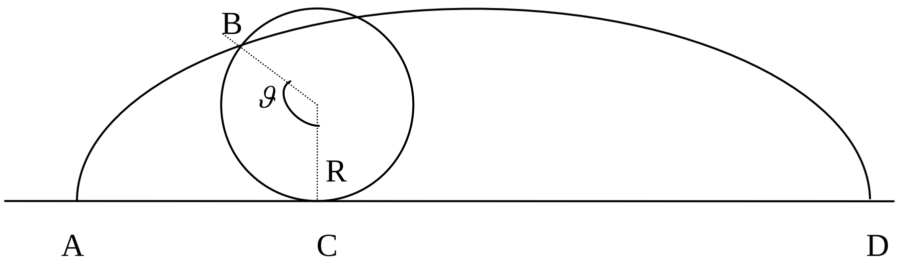


Figura 2.1

Calcoliamo ora le coordinate di tale punto (generico) B sulla cicloide.

Sia ϑ l'angolo che corrisponde a questo punto; l'arco BC ha lunghezza $R\vartheta$ e il segmento AC, che per definizione della cicloide è pari all'arco BC, avrà anch'esso lunghezza $R\vartheta$.

Osservando la Figura 2.2, si ha che $BQ = R * sin(\vartheta - \frac{\pi}{2}) = -\cos\vartheta$ e

$PC = QO = R * \cos(\vartheta - \frac{\pi}{2}) = R * sin\vartheta$; pertanto avremo:

$$x = AP = AC - PC = R * (\vartheta - sin\vartheta)$$
$$y = PB = PQ + BQ = R * (1 - \cos\vartheta)$$

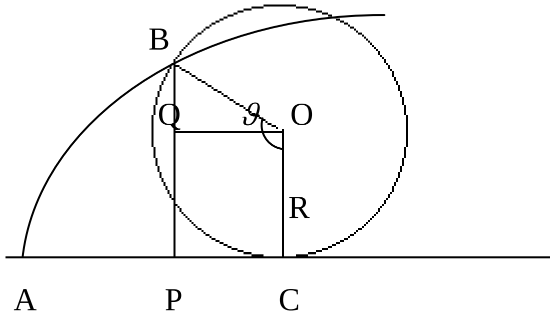


Figura 2.2

Osserviamo che se l'angolo ϑ cresce con velocità uniforme v = 1, risulta $\vartheta = t$. La cicloide si può allora immaginare descritta da due movimenti combinati, il primo traslatorio uniforme lungo l'asse x di equazioni:

$$\begin{cases} x = Rt \\ y = 0 \end{cases}$$

E l'altro da un moto rotatorio uniforme in senso antiorario attorno al punto (0,1):

$$\begin{cases} x = -R * sint \\ y = R * (1 - \cos t) \end{cases}$$

Pertanto la composizione dei due moti genera la curva ***cicloide.***

Tale curva è protagonista della nostra vita quotidiana, e molti magari non lo sanno. È ben noto che le oscillazioni di un pendolo non sono rigorosamente isocrone, ossia non si svolgono in un tempo costante, e che il periodo di oscillazione aumenta coll'aumentare dell'ampiezza. Detto in altre parole, un corpo che cade senza attrito lungo una circonferenza (come il peso dell'orologio a pendolo) impiega tempi diversi secondo l'ampiezza, tanto maggiori quanto più ampi sono gli archi percorsi.

La domanda che noi ci poniamo, è la seguente: c'è una curva lungo la quale le oscillazioni sono rigorosamente isocrone?

Bene, il problema non è solo teorico, perché se si riuscisse a far oscillare il peso di un pendolo lungo una curva siffatta, ne risulterebbe un orologio più preciso del pendolo normale. Quando nel Seicento questo problema si pose, l'orologio a pendolo era agli inizi, e questo miglioramento non era trascurabile.

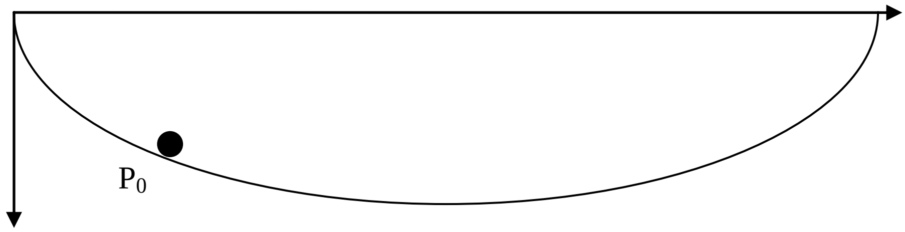
Ma per quanto riguarda il problema matematico, la risposta alla domanda su fatta è sicuramente positiva e la curva isocrona interessata è proprio la cicloide. Tale proprietà fu scoperta da Christian Huygens, che la divulgò nella sua celebre opera "Orologium oscillatorium".

L'immagine mostra uno strumento esposto al Museo delle Scienze di Firenze: si tratta di una guida a forma di cicloide, e permette di verificare sperimentalmente che la cicloide è tautocrona. Basta far oscillare una sferetta lungo la guida. La si posi sulla guida e la si rilasci senza spingerla: facendola partire da diverse altezze, si realizzeranno oscillazioni con ampiezze diverse. Cronometrando la durata di ogni oscillazione, si troverà che questa è sempre la stessa.

Consideriamo la cicloide di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t - sint \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

con l'asse delle ordinate *y* rivolto verso il basso, e sia P_0 un punto su di essa, corrispondente al valore t_0 del parametro $(0 < t_0 < \pi)$:



Se si fa cadere un grave lungo la cicloide a partire dalla quiete in P_0, il tempo per arrivare al punto più basso, ricordando e sfruttando la relazione:

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2 - 2\cos t = 2sin^2 \dfrac{t}{2}$ sarà:

$$T = \int \frac{ds}{v} = \int_{t_0}^{\pi} \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2g\left[y(t) - y(t_0)\right]}} dt = \sqrt{\frac{2}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \frac{\sin t/2}{\sqrt{\cos t_0 - \cos t}}$$

Osservando inoltre che

$\cos t = 2\cos^2 \dfrac{t}{2} - 1$ $\Longrightarrow$ $\cos t_0 - \cos t = 2(\cos^2 \dfrac{t_0}{2} - \cos^2 \dfrac{t}{2})$ ponendo:

$\cos \dfrac{t}{2} = u$ e $\cos \dfrac{t_0}{2} = u_0$ si ottiene:

$$T = \frac{1}{g} \int_{t_0}^{\pi} \frac{\sin t/2}{\sqrt{\cos^2 t_0/2 - \cos^2 t/2}} dt = -\frac{2}{g} \int_{u_0}^{0} \frac{du}{\sqrt{u_0{}^2 - u^2}} = \frac{2}{g} \int_{0}^{1} \frac{dw}{\sqrt{1 - w^2}} = \frac{\pi}{g}$$

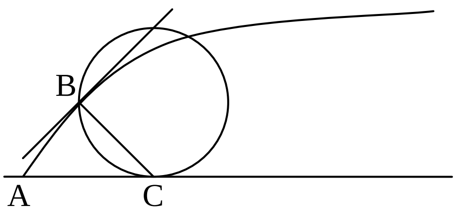
che è indipendente da t_0.

In conclusione, il tempo di caduta da un qualsiasi punto sulla cicloide fino al punto più basso è sempre lo stesso, qualsiasi sia il punto iniziale; in altre parole, **la cicloide è isocrona.**

Descartes e Fermat sulla tangente alla cicloide.

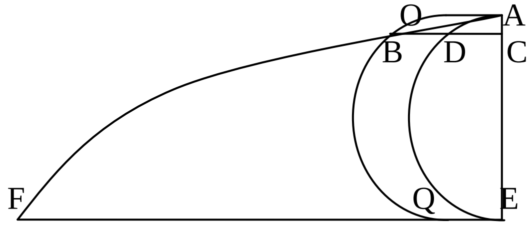
Soffermiamoci ora, sul lavoro di Cartesio e di Fermat, volto alla risoluzione del problema della tangente alla cicloide.

I due si mossero su due strade completamente differenti. Fermat, vide quest'opera come banco di prova del suo metodo di adequazione nella sua massima generalità e pertanto lo inquadrò in un metodo generale di tracciamento delle tangenti sia alle curve algebriche sia trascendenti. Al contrario Descartes, il cui metodo si applicava solo alle curve algebriche, si adoperò in un metodo, valido sì solo per la cicloide, ma estremamente brillante e conciso.



L'idea centrale di Descartes si basa sul fatto che il cerchio generatore della cicloide rotola senza strisciare sulla retta AC; dunque, a ogni istante il punto C, in cui il cerchio generatore tocca la retta AC, è immobile e il moto si riduce ad una rotazione attorno a C. Di conseguenza la retta CB, che unisce il centro istantaneo di rotazione C al punto B sulla cicloide, è ortogonale alla cicloide stessa; la perpendicolare a CB per B sarà allora la tangente cercata.

Al contrario di Cartesio, Fermat trova la tangente alla cicloide applicando il suo metodo dell'adequazione, che consiste nello scrivere la proprietà caratteristica della curva in esame sui punti della tangente. Occorrerà, anzitutto, trovare la proprietà caratteristica della cicloide.



Fermat considera la (semi-) cicloide FBA e il (semi-) cerchio generatore ADE. Preso un punto qualsiasi C sul diametro, si traccia la retta orizzontale CB che incontra la cicloide in B.

Immaginiamo ora di spostare il semicerchio ADE fino a farlo passare per B; per la proprietà della cicloide l'arco BQ sarà uguale al segmento FQ. Poiché l'intero segmento FE è uguale alla semicirconferenza ADE e l'arco BQ è uguale all'arco DE, il segmento QE sarà uguale all'arco AD. D'altra parte i segmenti BD e QE sono uguali e quindi in definitiva il segmento BD è uguale all'arco AD. In conclusione, se si prende un qualsiasi punto C sul diametro e si tira la retta CB che incontra la circonferenza in D e la cicloide in B, l'arco AD è uguale al segmento BD compreso tra la circonferenza e la cicloide. Questa è la proprietà caratteristica da cui Fermat parte per determinare la tangente alla cicloide nel punto B.

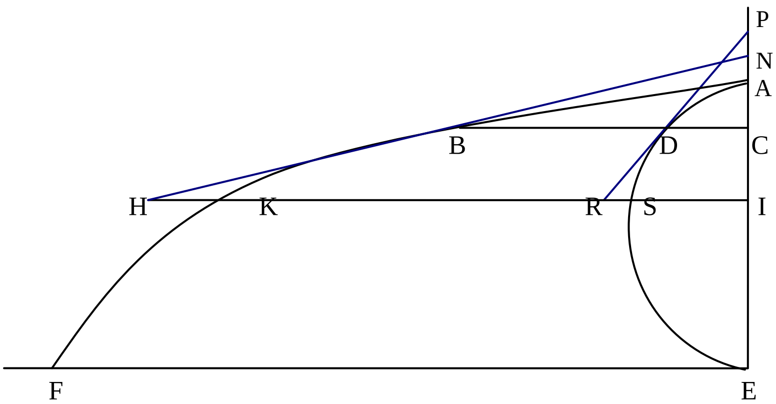


Figura 2.3

Una volta individuata la proprietà caratteristica, tracciamo le tangenti alla circonferenza e alla cicloide nei punti corrispondenti D e B; la prima sarà nota, o meglio sarà determinato il punto P in cui incontra l'asse, la seconda incognita. Per determinarla, bisogna trovare il punto N, ossia la lunghezza del segmento CN.

Supponiamo qui che sia nota la tangente alla circonferenza. Nella Figura 2.2, i segmenti AC = b, BC = c, PC = d, PD = f, BD = g, DC = h sono quantità note, mentre l'incognita è la lunghezza del segmento CN = a (seguendo Fermat, che usa le notazioni di Viète, indichiamo con le consonanti le quantità note e con le vocali le incognite). Prendiamo ora un punto H sulla tangente e tirata la retta HI indichiamo con K, R e S le sue intersezioni rispettivamente con la cicloide, con la tangente alla circonferenza e con la circonferenza. Poniamo poi CI = *e*.

Per la similitudine dei triangoli HNI e BCN, si ha:

HI : BC = NI : NC   e dunque:

$$HI = BC * \frac{NI}{NC} = c * \frac{a+e}{a}$$

Applichiamo ora il metodo di Fermat e dunque scriviamo la proprietà caratteristica della cicloide relativamente al punto H sulla tangente. Si può anche prendere il punto R sulla tangente alla circonferenza, e scrivere HR al posto di KS. Avremo allora:

HR $\approx$ arco AS = arco AD + arco DS = BD + arco DS.

A questo punto rientra un’altra caratteristica essenziale del metodo di Fermat, quella che ne consente l’applicazione anche alle curve trascendenti come la cicloide.

Nel nostro caso, si può sostituire l’arco DS con la porzione DR della tangente. Avremo dunque:

HR $\approx$ BD + DR.

Si tratta ora di esprimere HR e DR in termini delle grandezze date. Per la similitudine dei triangoli PRI e PDC si ha:

DR : CI = PD : PC,   e dunque: $DR = e * \frac{f}{d}$

Quanto al primo membro, risulta HR = HI – RI, e per la similitudine dei triangoli PRI e PDC avremo:

RI : DC = PI : PC,   da cui $RI = h * \frac{d+e}{d}$

Si ha dunque in definitiva:

$$c * \frac{a+e}{a} - h * \frac{d+e}{d} \approx g + e * \frac{f}{d}$$

sviluppando e ricordando che $c = g + h$, troviamo:

$$c * \frac{e}{a} - h * \frac{e}{d} = e * \frac{f}{d}$$

e quindi in conclusione:

52

$$a = \frac{dc}{f + h}$$

trovando così la lunghezza del segmento CN, così come volevamo.

La brachistocrona.

Galileo Galilei aveva notato che una sfera arriva prima rotolando lungo un arco di cerchio piuttosto che sulla corda di questo, anche se essa è più corta.

Il problema fu però proposto per la prima volta in forma ufficiale da Johann Bernoulli nel 1697. Nell'introduzione al problema Bernoulli accennava al fatto che esso fosse difficoltoso anche per quei matematici che avevano ampliato la matematica con dei teoremi "che (essi dicono) non erano conosciuti da nessuno". È evidente qui l'allusione a Isaac Newton, che aveva dato inizio tre anni prima alla disputa Newton-Leibniz sulla paternità del calcolo infinitesimale (Bernoulli era un accanito sostenitore di Leibniz e denigratore di Newton). Il problema quindi era soprattutto una sfida a Newton. Bernoulli fece circolare il problema in tutta Europa e poco dopo arrivarono tre risposte: una di Leibniz, una di De l'Hopital e una proveniente dall'Inghilterra e non firmata. Bernoulli riconobbe però subito l'autore: Newton. Si dice addirittura che il grande scienziato inglese risolse il problema in una notte dopo un'estenuante giornata di lavoro.

In seguito anche il fratello e rivale di Johann, Jakob, risolse il problema.

Il problema della *brachistocrona*, era il seguente: tra tutte le curve regolari che congiungono due punti dati, trovare quella lungo la quale un qualsiasi grave, soggetto unicamente alla forza di gravità, potrebbe discendere nel *più breve tempo* possibile.

Consideriamo allora nel piano verticale *xy* due punti A(0,0) e B(x,y). Il problema in termini matematici potrebbe essere esposto come segue: l'energia cinetica del grave (assimilabile a un punto materiale) nel punto di partenza è nulla, poiché è nulla la sua velocità. Il lavoro compiuto dalla forza di gravità nello spostare il punto materiale dal punto (0,0) a qualunque punto (x,y) è mgy e questo lavoro deve essere uguale alla variazione dell'energia cinetica del punto materiale, cioè:

$mgy = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^{\,2}$ e nel nostro caso ponendo $v_0 = 0$, si ottiene che la velocità che il punto materiale ha quando raggiunge il punto B(x,y) è:

$v = \sqrt{2gy}$ e ricordando che $v = \dfrac{ds}{dt}$ si giunge alla:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}{2gy}}\, dx$$

L'intervallo di tempo *t* che il punto materiale impiega per discendere da A a B dipende dalla particolare curva *y = f(x)* lungo la quale si muove ed è dato da:

$$(2.1) \qquad t = \int_0^x \sqrt{\frac{1 + (f'(x))^2}{2gf(x)}}\, dx$$

Il problema è trovare la curva che passa per i punti A(0,0) e B(*x*,*y*) e minimizza il valore dell'integrale indicato nell'espressione (2.1). (Il termine brachistocrona è composto dalle parole greche *brachistos* = il più breve e *chronos* = tempo e significa il "tempo più breve").

A prima vista, si potrebbe congetturare che la retta congiungente A e B dia anche il più breve intervallo di tempo, ma basta riflettere un momento per mettere in dubbio questa congettura poiché si potrebbe guadagnare un certo intervallo di tempo facendo sì che il punto materiale cominci a cadere verticalmente all'inizio, aumentando così la sua velocità più rapidamente di quanto potrebbe fare se dovesse discendere lungo una traiettoria inclinata. Con questa maggiore velocità, il punto materiale può riuscire a percorrere un cammino più lungo raggiungendo B in un intervallo di tempo più breve. La risoluzione di questo problema esula dall'ambito di questo lavoro, ma la brachistocrona in realtà non è altro che un arco di cicloide passante per A e B avente una cuspide nell'origine.

Scrivendo l'equazione (2.1) nella forma equivalente:

$$t = \int \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gy}}$$

e sostituendo le equazioni della cicloide nell'equazione precedente, si ottiene:

$$t = \int_0^{\vartheta_1} \sqrt{\frac{a2(2 - 2\cos\vartheta)}{2ga(1 - \cos\vartheta)}}\, d\vartheta = \vartheta_1 \sqrt{\frac{a}{g}}$$

interpretato come intervallo di tempo che il punto materiale impiega per discendere da A a B. L'intervallo di tempo impiegato dal punto materiale per raggiungere l'estremo inferiore dell'arco si ottiene ponendo $\vartheta_1 = \pi$. E' un fatto notevole da notare che l'intervallo di tempo impiegato dal punto materiale per discendere lungo la cicloide da (0,0) al punto più basso è uguale all'intervallo di tempo che il punto materiale impiega, partendo dalla quiete, per discendere da *qualunque punto intermedio* dell'arco.

In questo caso, la velocità in B(*x*,*y*) è: $v = \sqrt{2g(y - y_0)}$

e l'intervallo di tempo impiegato è:

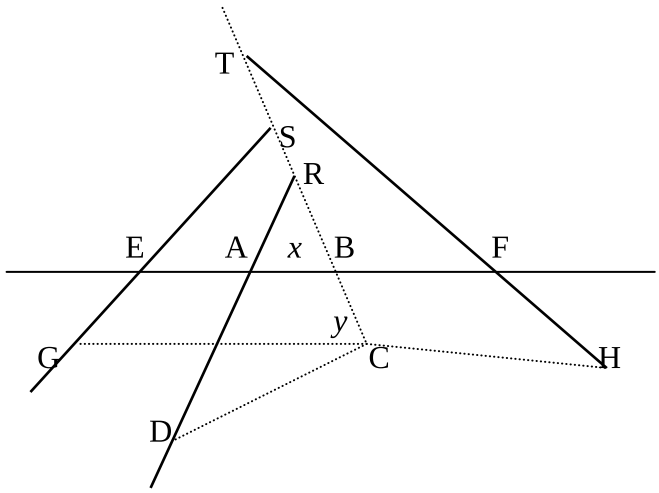
$$T = \int_{\vartheta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{a^2(2 - 2\cos\vartheta)}{2ag(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)}}\, d\vartheta = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

Poiché il risultato è indipendente dal valore ϑ_0 ciò significa che il punto materiale impiega lo stesso intervallo di tempo per raggiungere il più basso punto della cicloide, qualunque sia il punto dell'arco da cui viene abbandonato a se stesso dalla quiete. In questo senso, si è soliti dire che la cicloide è anche *tautocrona* (dal greco *tauto = lo stesso e chronos = tempo*) oltre a essere una *brachistocrona*.

Il problema di Pappo.

Cartesio usa il problema di Pappo o problema delle tre (o più) rette per capire cosa succede quando un problema porta a un'equazione a due incognite. Il problema, che fino allora non era stato risolto nella sua generalità, è il seguente:

"Date tre, quattro o più linee rette in un piano, trovare la posizione dei punti (luogo) da cui si possono costruire un ugual numero di segmenti, uno per ciascuna retta data, che formino un angolo noto con ciascuna delle rette date e tali che il rettangolo formato da due dei segmenti così costruiti stia in un rapporto dato con il quadrato del terzo segmento costruito se le rette sono tre; invece se vi sono quattro rette, che stia in un rapporto dato con il rettangolo formato dagli altri due. Oppure, se le rette sono cinque o sei, che il parallelepipedo costruito con tre di esse stia in un rapporto dato con il parallelepipedo costruito con le altre. In tal modo il problema può estendersi a un qualsiasi numero di linee".



Pappo aveva dichiarato che, quando ci sono tre o quattro rette, il luogo è una sezione conica. Cartesio considera il problema di Pappo nel caso in cui le rette date siano quattro e ne descrive il procedimento:

siano AB, AD, EG, FH, ecc. delle linee (Cartesio indica con la parola "linea" sia la retta sia il segmento) date per posizione (in un piano), e occorra trovare un punto, come C, dal quale, condotte su quelle date altre linee rette, come CB, CD, CG e CH, in modo che gli angoli CBA, CDA, CGE, CHF, ecc. siano dati e tali che il prodotto di una parte di queste linee sia uguale al prodotto delle rimanenti o che l'uno (di questi prodotti) stia all'altro in un rapporto dato.

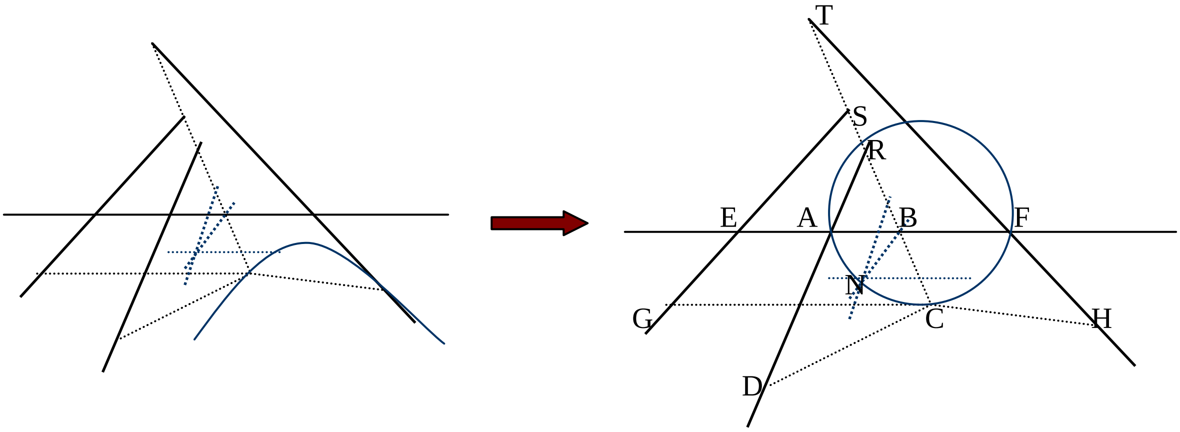
Dopo aver esposto il problema, Cartesio inizia a risolverlo. Qui il matematico espone la sua visione delle coordinate su un piano.

"Innanzitutto suppongo il problema come già risolto e per liberarmi dalla confusione di tutte queste linee, considero una delle rette date e una di quelle che bisogna trovare, per esempio AB e CB, come le principali, e a queste cerco di riferire tutte le altre. Il segmento AB sia chiamato *x*, e BC *y,* e siano poi prolungate tutte le altre linee date fin quando non intersechino queste due".

Tralasciando calcoli e spiegazioni teoriche, Cartesio, riferendosi al grado dell'equazione, scrive:

"Si può notare che, nel prodotto di parecchie di queste rette (segmenti) l'una per l'altra, ciascuna quantità *x* e *y* può avere solo tante dimensioni (per "dimensione" Cartesio intende ciò che noi intendiamo come grado) quante sono le linee che serve a spiegare e che sono state moltiplicate come si è detto."

Dopo elaborati calcoli Descartes ci propone il seguente risultato:



"In proposito bisogna però, che determini ed indichi più particolarmente, il modo di trovare la curva cercata, che serve in ogni caso quando non vi sono che 3 o 4 rette date; lo stesso procedimento renderà evidente che il primo genere di curve contiene soltanto le tre coniche ed il cerchio, e nessun'altra linea. Consideriamo ancora le 4 rette AB, AD, EG e FH, e supponiamo di voler trovare un'altra curva su cui giaccia un'infinità di punti come C, dal quale, avendo condotto le 4 linee CB, CD, CG e CH, in modo che formino angoli dati con le rette date, il prodotto di CB per CG sia uguale a quello di CD per CH".

In simboli CB*CG = CD*CH. Il risultato di Cartesio è:

$$yy = 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfgl * x - bcfg * xx}{ez^3 - cgzz}$$

con x, y incognite mentre tutte le altre lettere indicano costanti. Scritta in termini più semplici l'equazione precedente diventa:

$$y^2 = Ay + Bxy + Cx + Dx^2$$

dove A, B, C e D sono numeri reali dipendenti dalle quantità date. Descartes osserva inoltre che, scegliendo un qualsiasi valore di x, si ottiene un'equazione di secondo grado in y che può essere risolta rispetto a y e che quindi y può essere costruita geometricamente. Se, quindi, si hanno infiniti valori di x, si hanno anche infiniti valori di y che sono le coordinate d'infiniti punti C il cui luogo è la curva descritta dall'equazione precedente.

L'equazione rappresenta una generica conica passante per l'origine e il tipo di conica è definito dai valori dei coefficienti A, B, C, D appartenenti a $\mathbb{R}$.

Conclusioni

Il presente lavoro di tesi ha cercato di mettere in luce le problematiche che affiorarono nel XVII secolo e con quali modalità i matematici del tempo ci si approcciarono e si cimentarono nelle loro risoluzioni. Il confronto fra le tre principali figure ha reso evidente come tre filosofie diverse di approccio, una migliorando quasi l'altra, portino comunque allo stesso risultato.

Nel periodo in cui si giunge a definire la geometria analitica dalla fusione di algebra e geometria, il Seicento si trova a fare i conti con uno dei problemi che vede impegnare tutta la comunità scientifica: il problema delle tangenti, fin ad allora lasciato da parte. È arrivato il momento di staccarsi dal particolare e dare metodi generali per diverse classi di figura (vedi il metodo di eliminazione di Fermat).

Descartes in primis, rivoluziona completamente lo stesso concetto di curva: non più un oggetto geometrico determinato da proprietà specifiche, ma luogo di punti le cui coordinate soddisfano a un'equazione $\mathcal{F}(x,y)=0$. Da qui, la risoluzione di problemi altrimenti inabbordabili (Problema di Pappo).

Secondo interesse di questa tesi, oltre a quello di evidenziare la storia del calcolo infinitesimale, è evidenziare come lo studio di questi importantissimi matematici porti a risolvere problemi più generali o meglio problemi riguardanti curve più generali.

Osservando le applicazioni, infatti, descritte nel II capitolo, si nota come i metodi illustrati nel I capitolo siano utili a giungere al calcolo delle tangenti per curve particolari, in particolar modo ho fatto riferimento a curve che si ritrovano nella realtà di ogni giorno, ma alle quali, magari, neppure si fa caso. Purtroppo non tutti immaginano che, semplicemente pedalando si descrive una curva (cicloide) dalle particolari proprietà, così come non si pensa alla brachistocrona osservando un qualsiasi orologio a pendolo.

Descartes, De Beaune, Fermat e altri ancora, hanno così contribuito alla nuova storia della matematica, introducendo degli strumenti indispensabili all'epoca e utili oggi a tutti noi, per affrontare problemi ai quali non facilmente ci si può avvicinare.

Ringraziamenti

Desidero innanzitutto ringraziare il Prof. Rizzo Sebastiano, per i preziosi insegnamenti durante questi ultimi due anni di laurea triennale, per le preziose ore che ha dedicato alla mia tesi e per la grande disponibilità e cortesia dimostratemi.

Un grazie ai responsabili della Biblioteca, che hanno messo a mia disposizione la loro esperienza.

Un caloroso ringraziamento va poi ai miei genitori, che, con il loro incrollabile sostegno morale ed economico, mi hanno permesso di raggiungere questo traguardo. Un sincero grazie anche a Riccardo e a Federica.

Un ringraziamento particolare alla mia metà, Mimmo, che da otto anni a questa parte mi ha sostenuto in ogni momento e ancor di più in questo periodo, facendo in modo che la mia mente, di tanto in tanto, vagasse oltre le formule e i libri.

Infine, voglio ringraziare i miei compagni d’avventura. In particolar modo Emanuela, che si è fidata di me rendendomi partecipe della sua vita, ha sempre saputo ascoltarmi, in ogni momento e occasione e mi ha donato ottimi consigli, anche di vita; Adele, che con il suo animo gentile e solare ha fatto volare le ore delle nostre giornate universitarie ed è riuscita a farmi vivere gli esami, per quanto si potesse, con maggiore tranquillità.

Bibliografia

[1] Barbieri F., Pepe L., "Bollettino di storia delle matematiche" in "Bibliografia italiana di storia delle matematiche", Editrice Compositori, 1992.

[2] Cresci L., "Le curve matematiche", Hoepli, Milano, 2005.

[3] Giusti E., "Oltre il compasso - La geometria delle curve", Ed. Polistampa, Firenze, 2000.

[4] Giusti E., "Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al Novecento", Istituti Edit. Polig. Internaz. 2007.

[5] Grattan-Guinness, "Companion Encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences", Routledge, London, voll. 2, 1994.

[6] Gray A., "Cycloids" §3.1 in "Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica", 2nd ed., Boca Raton, FL: CRC Press, 1997.

[7] Shea William R., "La magia dei numeri e del moto. René Descartes e la scienza del Seicento", Bollati Boringhieri, Torino, 1994.

[8] Thomas George B., Finney Ross L., "Brachistocrone e tautocrone" in "Analisi Matematica", Zanichelli, 1986.