

Il luogo geometrico del punto medio di una scala che scivola⁽¹⁾

Una scala di lunghezza l è appoggiata ad un muro e sul pavimento. Per assenza di attrito la scala scivola giù. Assimilando la scala ad un segmento AB di lunghezza l , determinare il luogo geometrico descritto dal punto medio M della scala mentre questa scivola fino ad adagiarsi sul pavimento.

Soluzione

Consideriamo la scala in una posizione particolare mentre scivola giù e indichiamo con M il suo punto medio. Notiamo subito che il segmento rappresentativo della scala, per assenza di attriti, o di altre forze vincolanti, si manterrà nel piano verticale contenente il segmento stesso.

Per caratterizzare algebricamente il luogo geometrico descritto dal punto medio M adottiamo come riferimento cartesiano ortogonale xOy quello avente l'origine O nel punto di intersezione della verticale per l'estremo B superiore della scala con il pavimento e verso OB; come asse x la retta contenente la proiezione della scala sul piano orizzontale ed orientata da O ad A (vedi figura).

Il segmento AB forma con la direzione negativa dell'asse x un angolo $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Le coordinate cartesiane del punto M sono

$$x_M = \frac{l}{2} \cos \theta, \quad y_M = \frac{l}{2} \sin \theta.$$

Osserviamo che quadrando le due espressioni e sommando membro a membro si ottiene

$$x_M^2 + y_M^2 = \frac{l^2}{4} \cos^2 \theta + \frac{l^2}{4} \sin^2 \theta, \text{ da cui}$$

$$x_M^2 + y_M^2 = \frac{l^2}{4} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta), \text{ e cioè}$$

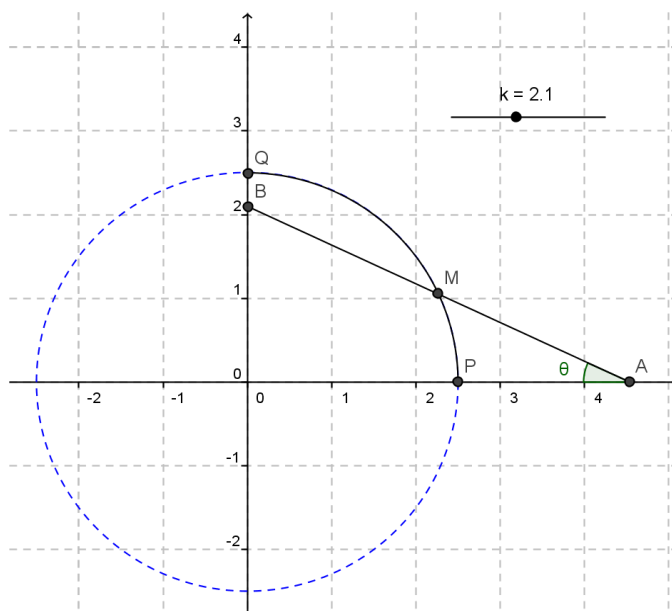
$$x_M^2 + y_M^2 = \frac{l^2}{4} \quad (*)$$

L'equazione (*) ottenuta è quella di una circonferenza con centro nell'origine O degli assi

e raggio $r = \frac{l}{2}$. Il luogo descritto dal punto M della scala è solo l'arco della circonferenza suddetta che ricade nel primo quadrante del piano cartesiano.

Note operative per la figura

La figura riportata è stata costruita con GeoGebra. I due estremi A, B del segmento, rappresentativo della scala, hanno coordinate $A(\sqrt{25-k^2}; 0)$, $B(0; k)$, con k (definito slider) che può assumere valori nell'intervallo $[0; 5]$. Facendo scorrere lo slider dal valore minimo 0 al valore massimo 5 il segmento AB mantiene la misura 5 ed il suo punto medio M descrive l'arco di circonferenza PQ, da P verso Q. Il diametro della circonferenza è uguale alla misura del segmento AB.



⁽¹⁾ Problema richiestomi dall'utente del sito A.R., studentessa universitaria di ingegneria