

Geometria Analitica (Sull'iperbole)

Si determini l'equazione dell'iperbole avente per asintoti le rette $r: 3x-3y-2=0$, $s: 3x+6y-10=0$ e passante per il punto $P(1;-1)$.

Soluzione

Scriviamo l'equazione della conica cercata in coordinate omogenee

$$\mathfrak{S}: a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

Ricordiamo che l'iperbole è tangente ai suoi asintoti nei suoi punti all'infinito e che questi sono le direzioni degli asintoti. I due punti impropri degli asintoti si deducono dai rispettivi coefficienti angolari. Si ha:

$$r: 3x-3y-2=0 \rightarrow I_{\infty}(r) = (1;1;0);$$

$$s: 3x+6y-10=0 \rightarrow I_{\infty}(s) = (1;-1/2;0) \sim (2;-1;0).$$

Per determinare l'equazione della conica abbiamo bisogno di cinque condizioni indipendenti. Ricordiamo, infatti, che dei sei coefficienti a_{ij} almeno uno deve essere diverso da zero.

Le condizioni che imponremo che siano soddisfatte dai coefficienti sono:

- L'equazione della conica deve essere soddisfatta dalle coordinate dei due punti $I_{\infty}(r)$, $I_{\infty}(s)$. In tal modo si ottengono due condizioni.
- L'equazione della conica deve essere soddisfatta dalla coordinate del punto P, le cui coordinate omogenee sono $(1;-1;1)$.
- Sfruttando il **teorema i reciprocità**, scriveremo le equazioni delle polari rispetto alla conica di due qualsiasi punti impropri ed imponremo che le equazioni ottenute siano soddisfatte dalle coordinate del centro della conica che è dato dal punto di intersezione tra gli asintoti. In tal modo otterremo altre due condizioni.

Ciò fatto, si risolverà il sistema formato dalle cinque equazioni nelle incognite a_{ij} .

Coordinate del centro della conica

$$\begin{cases} r: 3x-3y-2=0 \\ s: 3x+6y-10=0 \end{cases} \rightarrow C\left(\frac{14}{9}; \frac{8}{9}\right)$$

$$I_{\infty}(r) \in \mathfrak{S} \rightarrow a_{11} + 2a_{12} + a_{22} = 0 \quad (1)$$

$$I_{\infty}(s) \in \mathfrak{S} \rightarrow 4a_{11} - 4a_{12} + a_{22} = 0 \quad (2)$$

$$P(1;-1;1) \in \mathfrak{S} \rightarrow a_{11} - 2a_{12} + a_{22} + 2a_{13} - 2a_{23} + a_{33} = 0 \quad (3)$$

Come punti impropri scegliamo $I_{\infty}(r)$, $I_{\infty}(s)$ le cui polari sono

$$p_{I_{\infty}(r)}: (a_{11} - a_{12})x_1 + (a_{12} - a_{22})x_2 + (a_{13} - a_{23})x_3 = 0;$$

$$p_{I_{\infty}(s)}: (2a_{11} - a_{12})x_1 + (2a_{12} - a_{22})x_2 + (2a_{13} - a_{23})x_3 = 0.$$

$$C \in p_{I_{\infty}(r)} \rightarrow 14a_{11} - 6a_{12} - 8a_{22} + 9a_{13} - 9a_{23} = 0 \quad (4)$$

$$C \in p_{I_{\infty}(s)} \rightarrow 28a_{11} + 2a_{12} - 8a_{22} + 18a_{13} - 9a_{23} = 0 \quad (5).$$

Risolvendo il sistema formato dalle cinque equazioni (1), (2), (3), (4), (5) si ricava:

$$a_{11} = 2a_{12}, \quad a_{22} = -4a_{12}, \quad a_{13} = -\frac{32}{9}a_{12}, \quad a_{23} = \frac{22}{9}a_{12}, \quad a_{33} = 16a_{12}$$

Come si vede i coefficienti sono stati espressi in funzione di a_{12} . Con $a_{12} = 1$ si ricava la seguente equazione cartesiana:

$$\mathfrak{S}: 9x^2 + 9xy - 18y^2 - 32x + 22y + 72 = 0$$

La rappresentazione grafica della curva e degli altri elementi geometrici è nell'immagine che segue.

