Coniche Bitangenti

Problema[1]

Si studi e si disegni la conica C bitangente alla curva γ, $\gamma: x^2-2xy+y^2+2y-4=0$ nei suoi punti di intersezione con l'asse delle x e passante per P(0;2).

Soluzione

Classificazione di γ.

Dal determinante della conica si deduce che si tratta di una parabola.

$\gamma: x^2-2xy+y^2+2y-4=0$ \ (1)

Ricerca del centro della parabola γ

Si scrive l'equazione della conica in coordinate omogenee e si ottiene

$\gamma: x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+2x_2x_3-4x_3^2=0$ (2)

quindi si cerca il punto improprio risolvendo il sistema tra l'equazione (2) e l'equazione della retta impropria: $x_3=0$.

$\begin{cases}\gamma: x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+2x_2x_3-4x_3^2=0\\ i_\infty: x_3=0\end{cases}$ La soluzione è I(1;1;0). Questo è il centro della conica.

Ricerca dell'equazione dell'asse della parabola

Occorre scrivere la polare del punto coniugato di I (direzione coniugata).

La direzione coniugata è I′(1;-1;0)

Equazione della polare di I′

$P_{I'}$: $(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=0 \Rightarrow a: 2x-2y-1=0$ (equazione dell'asse di simmetria)

Coordinate del vertice di γ

$$\begin{cases}2x-2y-1=0\\ x^2-2xy+y^2+2y-4=0\end{cases} \Rightarrow V\left(\frac{19}{8};\frac{15}{8}\right)$$

Intersezioni di γ con l'asse x:

$$\begin{cases}y=0\\ x^2-2xy+y^2+2y-4=0\end{cases} \Rightarrow A(2;0),\ B(-2;0)$$

Equazioni delle tangenti a γ in A e B tramite le polari.

$$P_A:(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow 2x-y-4=0;$$

$$P_B:(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow 2x-3y+4=0$$

Per determinare l'equazione della curva C scriviamo il fascio di coniche cui la stessa appartiene. Considerato che la curva C deve essere bitangente a γ nei punti A e B, per scrivere l'equazione del fascio utilizziamo come curve generatrici la conica degenere la cui equazione è data dal prodotto dei primi membri delle equazioni delle rette tangenti uguagliato a zero e la conica degenere la cui equazione si ottiene contando due volte la retta che unisce i punti A, B, cioè l'asse delle ascisse: $y^2=0$. L'equazione del fascio è

[1] Esercizio assegnato nella prova d'Esame di Geometria 1, Univ. Del Salento Lecce, Corso di laurea in Matematica, il 22-01-2008

$F: \lambda(2x-3y+4)(2x-y-4)+\mu y^2=0$

Imponendo che la conica passi da P(0;2) si determinano λ e μ. Si ha:

$\lambda(-6+4)(-6)+4\mu=0 \Rightarrow \ \mu=-3\lambda$

L'equazione della curva cercata è:

$C: x^2-2xy+2y-4=0$. La curva è un'iperbole.

Nella figura seguente sono riportate le rette e le curve ottenute.