

Geometria analitica dello spazio¹

Rette a confronto

Problema

Determinare le equazioni della retta r passante per il punto $P(-1;2;-2)$ e parallela ai piani $\pi: x+3y+2z=3$, $\pi': 4y+z=5$.

Stabilire se la retta r e la retta s avente equazioni

$s: (x=2+u; y=7-2u; z=-3u)$, con $u \in \mathbb{R}$, si intersecano; in caso affermativo determinare il punto di intersezione.

Soluzione

- 1) I due piani π, π' sono incidenti; ciò si deduce dal fatto che i rispettivi coefficienti dei termini in x, y, z non sono proporzionali, quindi i loro vettori giacitura $\vec{g}_1(1;3;2), \vec{g}_2(0;4;1)$ non sono paralleli. Sia a la retta intersezione dei due piani. Le equazioni cartesiane della retta sono

$$a: \begin{cases} \pi: x+3y+2z=3 \\ \pi': 4y+z=5 \end{cases}$$

- 2) La retta r richiesta è quella passante per $P(-1;2;-2)$ ed avente **parametri direttori** uguali o proporzionali a quelli della retta a .

I parametri direttori $(l;m;n)$ della retta a si determinano dai minori complementari del secondo ordine della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{i valori dei minori sono} \quad l = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3-8 = -5, \quad m = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad n = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

Dunque i parametri direttori di r sono $r(-5;-1;4)$. La retta r è determinata dalle uguaglianze dei seguenti rapporti

$$r: \frac{x-x_P}{l} = \frac{y-y_P}{m} = \frac{z-z_P}{n} \rightarrow r: \frac{x+1}{-5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{4}$$

Per comodità, della stessa retta forniamo le equazioni in forma parametrica.

$$r: \frac{x+1}{-5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{4} = t \rightarrow r: (x = -5t-1; y = -t+2; z = 4t-2), \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

3) Confronto tra le rette r, s

I parametri direttori della retta s sono $s(1;-2;-3)$ e confrontandoli con i parametri direttori della retta $r(-5;-1;4)$ si nota che non sono proporzionali; infatti, risulta $\frac{1}{-5} \neq \frac{-2}{-1} \neq \frac{-3}{4}$. Ciò permette di affermare che le rette non sono parallele; potrebbero essere incidenti oppure sghembe.

¹ Esercizio assegnato nella prova d'Esame Matematica 1, A.A. 2014-2015- Parma, 20 luglio 2015, Corso di Laurea in Chimica

Ricordiamo che **due rette sono sghembe se non sono complanari**. Per stabilire se le due rette sono incidenti si possono determinare due punti di ciascuna retta e verificare se sussiste la condizione di complanarità per i quattro punti.

Condizione di complanarità per quattro punti

Quando sono note le coordinate di quattro punti, in un riferimento cartesiano Oxyz, si può riconoscere se sussiste la complanarità dei punti tramite il valore di un determinante del quarto ordine. Precisamente, noti i punti $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$, $D(x_D; y_D; z_D)$, essi sono complanari se e solo se risulta

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (*)$$

Si può ottenere dell'(*) una forma più semplice; precisamente, basta sottrarre alle righe seconda, terza e quarta la prima riga e calcolare il determinante applicando la regola di Laplace sviluppandolo secondo la quarta colonna. Si ricava la seguente forma equivalente

$$\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A & z_D - z_A \end{vmatrix} = 0 \quad (**)$$
 in virtù di alcune proprietà dei determinanti.

Scegliamo dunque due punti su ciascuna delle due rette r, s.

Retta r

Un punto è $P(-1;2;-2)$; per il secondo punto poniamo nelle equazioni parametriche della retta $t=1$; si ottiene il punto $A(-6;1;2)$.

Retta s

Poniamo nelle equazioni parametriche della retta successivamente $u=0$ e $u=1$; si ottengono i punti $B(2;7;0)$, $C(3;5;-3)$.

Verifica della complanarità dei punti A,B,C,P

Utilizziamo la forma (**) con P in luogo di D.

$$\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ x_P - x_A & y_P - y_A & z_P - z_A \end{vmatrix} = 0? \rightarrow \begin{vmatrix} 2 - (-6) & 7 - 1 & 0 - 2 \\ 3 - (-6) & 5 - 1 & -3 - 2 \\ -1 - (-6) & 2 - 1 & -2 - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 6 & -2 \\ 9 & 4 & -5 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 9 & 4 & -5 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$2[(-64 - 75 - 9) - (-20 - 20 - 108)] = 2(-148 + 148) = 0 \text{ La condizione è verificata.}$$

Conclusione: i quattro punti sono complanari e quindi lo sono anche le rette che li contengono.

Intersezione tra le rette r, s

Poiché delle due rette abbiamo le rappresentazioni parametriche imponiamo che il generico punto di r coincida con il generico punto di s . Si ottiene il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} -5t-1=2+u \\ -t+2=7-2u \\ 4t-2=-3u \end{cases} \text{ da cui } \begin{cases} -5(2u-5)-1=2+u \\ t=2u-5 \\ 4(2u-5)-2=-3u \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 11u=22 \\ t=2u-5 \\ 11u=22 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u=2 \\ t=-1 \end{cases}$$

Il punto di intersezione tra le due rette si ottiene ponendo $u=-2$ nelle equazioni parametriche di s , oppure $t=-1$ nelle equazioni parametriche di r . Il punto è $Q(4;3;-6)$.

Di seguito è riportata una figura in cui sono visibili i due piani Π , Π' , la loro retta di intersezione a , le rette r , s , e i punti A , B , C , P .

