

## Algebra Lineare

Dato il sottospazio  $W = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$  dello spazio vettoriale euclideo  $\mathbb{R}^3$  dotato del prodotto scalare canonico,

1. determinare lo spazio ortogonale  $W^\perp$ ;
2. determinare una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  contenente una base di  $W$ .

### Soluzione

#### Strategia risolutiva

Innanzitutto si determina l'espressione algebrica del generico vettore del sottospazio  $W$ , quindi si determina una base di  $W$ ; ciò fatto, si passa a determinare il sottospazio  $W^\perp$ . Per la seconda richiesta si individuerà una base di  $\mathbb{R}^3$  utilizzando vettori della base scelta di  $W$  e vettori di una base di  $W^\perp$  e da questa base si costruirà una base ortonormale con il procedimento di **Gram - Schmidt**.

#### Elaborazioni

- 1) L'equazione  $x+y-z=0$ , che vincola le componenti del generico vettore  $\vec{u}(x; y; z)$  di  $W$ , elaborata opportunamente consente di risalire ad una base del sottospazio.

Da  $x + y - z = 0$  segue  $z = x + y$ ;

quindi, assumendo  $x=t, y=t'$ , come parametri liberi, per il generico vettore di  $W$ , con l'ovvio significato dei simboli si ha:

$$\vec{u}(x; y; z) = (t; t'; t+t') = (t; 0; t) + (0; t'; t') = t(1; 0; 1) + t'(0; 1; 1)$$

In conclusione, considerando i due vettori  $\vec{w}_1 = (1; 0; 1)$ ,  $\vec{w}_2 = (0; 1; 1)$ , il generico vettore  $\vec{u}(x; y; z)$  di  $W$  si può esprimere come combinazione lineare di  $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ . D'altra parte, si riconosce agevolmente che i vettori  $\vec{w}_1, \vec{w}_2$  sono linearmente indipendenti<sup>(1)</sup> e pertanto possiamo affermare che  $W$  ha dimensione 2 e che l'insieme  $B = \{\vec{w}_1; \vec{w}_2\}$  rappresenta una sua base.

#### Individuazione dello spazio $W^\perp$

Per definizione il sottospazio  $W^\perp$  di  $\mathbb{R}^3$  è l'insieme dei vettori di  $\mathbb{R}^3$  ortogonali ai singoli vettori di  $W$ :

---

<sup>(1)</sup> Ciò si deduce dal fatto che la matrice delle componenti dei due vettori  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  ha rango 2.

$$W^\perp = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{v} \cdot \vec{u} = 0, \forall \vec{u} \in W \right\}$$

Affinché il generico vettore  $\vec{v}$  di  $\mathbb{R}^3$  sia ortogonale a  $W$  è necessario e sufficiente che sia ortogonale ai vettori di una base di  $W$ .

Sia dunque  $\vec{v}(x; y; z)$  il generico vettore di  $\mathbb{R}^3$ . Imponiamo che sia ortogonale ai vettori della base  $B = \{\vec{w}_1; \vec{w}_2\}$  di  $W$ , tenendo conto che in  $\mathbb{R}^3$  è definito il prodotto scalare standard.

$$\vec{v}(x; y; z) \perp \vec{w}_1(1; 0; 1) \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w}_1 = 0 \Leftrightarrow x \cdot 1 + y \cdot 0 + z \cdot 1 = 0, \text{ da cui } x + z = 0; \quad (1.1)$$

$$\vec{v}(x; y; z) \perp \vec{w}_2(0; 1; 1) \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w}_2 = 0 \Leftrightarrow x \cdot 0 + y \cdot 1 + z \cdot 1 = 0, \text{ da cui } y + z = 0 \quad (1.2)$$

Poiché devono valere entrambe le condizioni (1.1), (1.2) si deduce che deve essere  $x = -z$ ,  $y = -z$  e dunque il generico vettore dello spazio ortogonale  $W^\perp$  ha la forma  $\vec{v}(-z; -z; z)$ , con  $z \in \mathbb{R}$ .

Osservato che  $(-z; -z; z) = z(-1; -1; 1)$ , deduciamo che per  $W^\perp$  possiamo assumere come base l'insieme avente come unico elemento il vettore  $\vec{w}_3 = (-1; -1; 1)$ .

## 2) Ricerca di una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ contenente i vettori di una base di $W$ .

Proviamo che l'insieme  $\{\vec{w}_1; \vec{w}_2; \vec{w}_3\}$  costituisce una base di  $\mathbb{R}^3$ .

### Prima dimostrazione

Poiché  $\mathbb{R}^3$  ha dimensione 3, per provare che  $\{\vec{w}_1; \vec{w}_2; \vec{w}_3\}$  è una base basta provare che i tre vettori sono linearmente indipendenti (l.i.) e ciò si può dimostrare facendo vedere che la matrice  $M$  avente come righe (o colonne) le componenti dei tre vettori ha rango 3.

In effetti la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ha come determinante } |M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1+0+0) - (-1-1+0) = 3$$

dunque i vettori sono l.i. e perciò  $\{\vec{w}_1; \vec{w}_2; \vec{w}_3\}$  è una base per  $\mathbb{R}^3$ .

### Seconda dimostrazione

Sappiamo già che  $\{\vec{w}_1; \vec{w}_2\}$  è una base di  $W$  e che  $\vec{w}_3$  è ortogonale a ciascuno dei due vettori  $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ . Vogliamo provare che i tre vettori sono linearmente indipendenti.

Supponiamo che esista una terna di scalari  $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$  tali che risulti

$$\lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2 + \lambda_3 \vec{w}_3 = 0 \quad (2.1)$$

e proviamo che  $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3) = (0; 0; 0)$ .

Infatti, possiamo scrivere la (2.1) nella forma equivalente

$$\lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2 = -\lambda_3 \vec{w}_3$$

e moltiplicando scalarmente i due membri per il vettore  $\vec{w}_3$ , dall'ortogonalità di quest'ultimo con  $\vec{w}_1$  e  $\vec{w}_2$  segue

$$(\lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2) \cdot \vec{w}_3 = -\lambda_3 \vec{w}_3 \cdot \vec{w}_3, \text{ da cui}$$

$$\lambda_1 \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_3 + \lambda_2 \vec{w}_2 \cdot \vec{w}_3 = -\lambda_3 \|\vec{w}_3\|^2, \text{ quindi } \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = -\lambda_3 \|\vec{w}_3\|^2, \text{ cioè } -\lambda_3 \|\vec{w}_3\|^2 = 0, \text{ ed}$$

essendo  $\|\vec{w}_3\|^2 = (-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3$  si deduce che deve essere  $\lambda_3 = 0$ . Pertanto, se sussiste la (2.1) necessariamente  $\lambda_3 = 0$ ; ciò implica che deve risultare anche

$$\lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2 = 0 \quad (2.2)$$

Teniamo ora presente che  $B = \{\vec{w}_1; \vec{w}_2\}$  è una base di  $W$  e quindi che detta uguaglianza si verifica se e solo se  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 0$ . In definitiva, relativamente alla terna dei vettori  $\vec{w}_1$ ,  $\vec{w}_2$ ,  $\vec{w}_3$ , se si verifica la (2.1) allora risulta  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = 0$ , quindi per definizione i tre vettori sono linearmente indipendenti. In conclusione, la terna  $\{\vec{w}_1; \vec{w}_2; \vec{w}_3\}$  è una base per  $\mathbb{R}^3$ .

### Costruzione della base ortonormale per $\mathbb{R}^3$

Come **primo vettore della base** ortonormale prendiamo il **versore** di  $\vec{w}_1$ , che indichiamo con  $\vec{u}_1$ :

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|}.$$

$$\text{Essendo } \|\vec{w}_1\| = \sqrt{2}, \text{ si ha } \vec{u}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Determiniamo il secondo vettore della base ortonormale individuando il vettore  $\vec{u}_2$  della forma

$$\vec{u}_2 = \vec{w}_2 + \lambda \vec{u}_1$$

e determiniamo lo scalare  $\lambda$  in modo che questo sia ortogonale ad  $\vec{u}_1$ ; deve risultare perciò

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 = 0,$$

quindi

$$(\vec{w}_2 + \lambda \vec{u}_1) \cdot \vec{u}_1 = 0, \text{ da cui } \vec{w}_2 \cdot \vec{u}_1 + \lambda = 0, \text{ perciò deve essere}$$

$$\lambda = -\vec{w}_2 \cdot \vec{u}_1 = -(0;1;1) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\left( 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dunque il vettore  $\vec{u}_2$  è

$$\vec{u}_2 = \vec{w}_2 + \lambda \vec{u}_1 = (0;1;1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left( -\frac{1}{2}; 1; 1 - \frac{1}{2} \right) = \left( -\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2} \right)$$

Avendosi  $\|\vec{u}_2\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ , il versore associato è

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} = \left( -\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2} \right) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \left( -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

Il vettore  $\vec{u}_2$  è il **secondo vettore della base ortonormale** che stiamo cercando.

### Terzo vettore della base ortonormale

Per quanto visto a proposito della base  $\{\vec{w}_1; \vec{w}_2; \vec{w}_3\}$  di  $\mathbb{R}^3$ , come terzo vettore della base ortonormale prendiamo il versore associato al vettore  $\vec{w}_3$ , sia esso  $\vec{u}_3$ . Si ha

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|} = \left( \frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

### Conclusione

Una base ortonormale per  $\mathbb{R}^3$  è  $B' = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3\}$ .