

Algebra Lineare

Dato il sottospazio $W = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare canonico,

1. determinare lo spazio ortogonale $W^\perp$;
2. determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ contenente una base di W .

Soluzione

Strategia risolutiva

Innanzitutto si determina l'espressione algebrica del generico vettore del sottospazio W , quindi si determina una base di W ; ciò fatto, si passa a determinare il sottospazio $W^\perp$. Per la seconda richiesta si individuerà una base di $\mathbb{R}^3$ utilizzando vettori della base scelta di W e vettori di una base di $W^\perp$ e da questa base si costruirà una base ortonormale con il procedimento di **Gram - Schmidt**.

Elaborazioni

- 1) L'equazione $x+y-z=0$, che vincola le componenti del generico vettore $\vec{u}(x; y; z)$ di W , elaborata opportunamente consente di risalire ad una base del sottospazio.

Da $x + y - z = 0$ segue $z = x + y$;

... i due vettori $\vec{w}_1 = (1; 0; 1)$, $\vec{w}_2 = (0; 1; 1)$, ... sono linearmente indipendenti⁽¹⁾ e ...

$B = \{\vec{w}_1; \vec{w}_2\}$ rappresenta una sua base.

Individuazione dello spazio $W^\perp$

Per definizione il sottospazio $W^\perp$ di $\mathbb{R}^3$ è l'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali ai singoli vettori di W :

$$W^\perp = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{v} \cdot \vec{u} = 0, \forall \vec{u} \in W \right\}$$

...

- 2) Ricerca di una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ contenente i vettori di una base di W .

Proviamo che l'insieme $\{\vec{w}_1; \vec{w}_2; \vec{w}_3\}$ costituisce una base di $\mathbb{R}^3$.

Prima dimostrazione

⁽¹⁾ Ciò si deduce dal fatto che la matrice delle componenti dei due vettori $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 2.

Poiché $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3, per provare che $\{\vec{w}_1; \vec{w}_2; \vec{w}_3\}$ è una base basta provare che i tre vettori sono linearmente indipendenti (l.i.)

...

Seconda dimostrazione

Sappiamo già che $\{\vec{w}_1; \vec{w}_2\}$ è una base di W e che $\vec{w}_3$ è ortogonale a ciascuno dei due vettori $\vec{w}_1, \vec{w}_2$. Vogliamo provare che i tre vettori sono linearmente indipendenti.

Supponiamo che esista una terna di scalari $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$ tali che risulti

$$\lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2 + \lambda_3 \vec{w}_3 = 0 \quad (2.1)$$

e proviamo che $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3) = (0; 0; 0)$.

...

Costruzione della base ortonormale per $\mathbb{R}^3$

Come **primo vettore della base** ortonormale prendiamo il **versore** di $\vec{w}_1$, che indichiamo con $\vec{u}_1$:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|}.$$

Essendo $\|\vec{w}_1\| = \sqrt{2}$, si ha $\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

Determiniamo il secondo vettore della base ...

Terzo vettore della base ortonormale

...

Conclusione

...