Composizione di una traslazione con una simmetria centrale

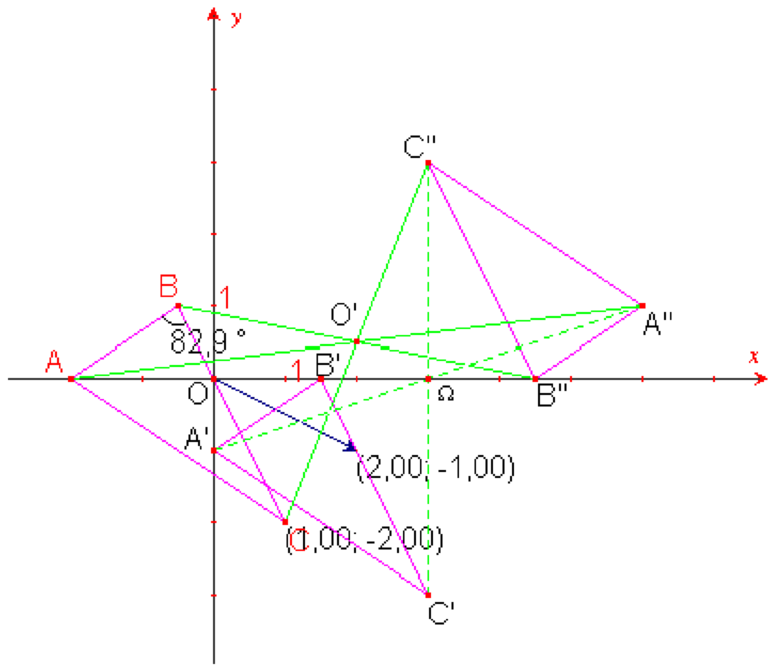
Problema (Composizione di una traslazione con una simmetria centrale)
In un piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale xOy rappresentare il triangolo ABC i cui vertici sono $A(-2;0)$, $B\left(-\frac{1}{2};1\right)$, $C(1;-2)$.

1. Dimostrare che l'angolo nel vertice B è acuto.
2. Determinare le coordinate dei vertici del triangolo A′B′C′ ottenuto dal triangolo ABC sottoponendolo alla traslazione τ determinata dal vettore $\vec{V}=2\vec{i}-\vec{j}$.
3. Scrivere le equazioni della simmetria centrale σ_Ω di centro il punto $\Omega(3;0)$ e determinare le coordinate dei vertici A″, B″, C″, immagini dei punti A′, B′, C′ nella simmetria σ_Ω.
4. Determinare le equazioni dell'isometria $\sigma_\Omega o\tau$ e dimostrare che si tratta ancora di una simmetria centrale determinano le coordinate del centro.

Soluzione

1. Per provare che l'angolo nel vertice B è acuto si potrebbero scrivere le equazioni delle rette dei lati AB, BC, quindi utilizzare i loro coefficienti angolari per determinare l'ampiezza di uno dei quattro angoli formati. Un altro procedimento potrebbe essere quello di utilizzare il teorema del coseno (di Carnot). Si determinano le misure dei tre lati del triangolo: $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$, $c=\overline{AB}$, quindi, posto $A\hat{B}C=\beta$, risultando
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\beta \Rightarrow \cos\beta=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
determinare l'ampiezza dell'angolo β. Seguiamo la seconda strada indicata.
$$a=\sqrt{\left(x_B-x_C\right)^2+\left(y_B-y_C\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+(3)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2};$$
$$b=\sqrt{\left(x_A-x_C\right)^2+\left(y_A-y_C\right)^2}=\sqrt{(-3)^2+(2)^2}=\sqrt{13};$$
$$c=\sqrt{\left(x_A-x_B\right)^2+\left(y_A-y_B\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+1}=\frac{\sqrt{13}}{2}$$
Per il coseno dell'angolo β si ha
$$\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\frac{45}{4}+\frac{13}{4}-13}{2\cdot\frac{3\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}}=\frac{\sqrt{65}}{65}\Rightarrow\beta=\arccos\left(\frac{\sqrt{65}}{65}\right)\approx 82°52'30''$$
Dunque l'angolo è acuto.
2. La traslazione τ determinata dal vettore $\vec{V}=2\vec{i}-\vec{j}$ trasforma il punto P(x;y) nel punto P′(x′;y′) e le equazioni che la descrivono analiticamente sono
$$\tau:\begin{cases}x'=x+V_x=x+2\\ y'=y+V_y=y-1\end{cases}$$
I tre punti A, B, C vengono così trasformati
$$A(-2;0)\to A'(0;-1);\ B\left(-\frac{1}{2};1\right)\to B'\left(\frac{3}{2};0\right);\ C(1;-2)\to C'(3;-3)$$

3. La simmetria centrale di centro il punto Ω è descritta dalle seguenti equazioni
$$\sigma_\Omega:\begin{cases} x'=2x_\Omega - x \\ y'=2y_\Omega - y\end{cases}$$
ed i punti A′, B′, C′ vengono trasformati ordinatamente come segue
$A'(0;-1)\rightarrow A''(6;1)$;
$B'\left(\frac{3}{2};0\right)\rightarrow B''\left(\frac{9}{2};0\right)$;
$C'(3;-3)\rightarrow C''(3;3)$



4. **Componendo due isometrie si ottiene sempre un'isometria**. In questo caso, la composizione della traslazione determinata dal vettore $\vec{V}=2\vec{i}-\vec{j}$ con la simmetria centrale di centro Ω dà luogo alla simmetria centrale avente per centro il punto O′ che è l'immagine di Ω nella traslazione determinata dal vettore $\vec{W}=-\frac{1}{2}\vec{V}$. Ciò si dimostra agevolmente con le equazioni cartesiane delle trasformazioni.

$$(x;y)\xrightarrow{\tau}\left(x'=x+2;\,y'=y-1\right)\xrightarrow{\sigma_\Omega}\left(x''=2x_\Omega-x';\,y''=2y_\Omega-y'\right)\equiv$$
$$\left(x''=2x_\Omega-(x+2);\,y''=2y_\Omega-(y-1)\right)\equiv\left(x''=2(x_\Omega-1)-x;\,y''=2\left(y_\Omega-\frac{1}{2}\right)-y\right)$$

Le ultime espressioni ottenute permettono di affermare che la trasformazione $\sigma_\Omega\circ\tau$ opera trasformando il punto P(x;y) nel punto P″(x'';y'') essendo
$$\sigma_\Omega\circ\tau:\begin{cases} x''=2(x_\Omega-1)-x \\ y''=2\left(y_\Omega-\frac{1}{2}\right)-y\end{cases}$$

che sono le equazioni della simmetria centrale di centro il punto $O'\left(x_\Omega-1;\,y_\Omega-\frac{1}{2}\right)$. Osserviamo ora che le coordinate di O′ possono essere scritte per evidenziare la presenza delle componenti cartesiane del vettore $\vec{W}=-\frac{1}{2}\vec{V}$. Infatti si può porre
$$\sigma_\Omega\circ\tau:\begin{cases} x''=2\left(x_\Omega-\frac{V_x}{2}\right)-x \\ y''=2\left(y_\Omega-\frac{V_y}{2}\right)-y\end{cases}$$

Questo risultato ha validità generale e per dimostrarlo è sufficiente scrivere le equazioni analitiche della traslazione determinata dal vettore $\vec{V}$ ed a seguire quelle della simmetria centrale σ_Ω. Riportiamo di seguito le elaborazioni che dimostrano l'affermazione.

$$(x;y)\xrightarrow{\tau}\left(x'=x+V_x;\,y'=y+V_y\right)\xrightarrow{\sigma_\Omega}\left(x''=2x_\Omega-x';\,y''=2y_\Omega-y'\right)\equiv$$

$$\left(x''=2x_\Omega-x-V_x;\,y''=2y_\Omega-y-V_y\right)\equiv\left(x''=2\left(x_\Omega-\frac{V_x}{2}\right)-x;\,y''=2\left(y_\Omega-\frac{V_y}{2}\right)-y\right)\qquad \text{C.V.D.}$$

Concludiamo con l'enunciato del teorema che abbiamo dimostrato con le elaborazioni algebriche precedenti.

Teorema

La composizione della traslazione determinata dal vettore $\vec{V}$ con la simmetria centrale di centro Ω dà luogo alla simmetria centrale $\sigma_\Omega \circ \tau$ avente per centro il punto O′ che è l'immagine di Ω nella traslazione determinata dal vettore $\vec{W}=-\frac{1}{2}\vec{V}$.

Osservazione- La traslazione e la simmetria centrale non commutano.

Se si scambia l'ordine delle trasformazioni, cioè si applica prima la simmetria centrale σ_Ω di centro il punto Ω e successivamente la traslazione τ determinata dal vettore $\vec{V}$, allora la trasformazione composta $\tau \circ \sigma_\Omega$ è una simmetria centrale il cui centro di simmetria è il punto O′ immagine di Ω nella traslazione determinata dal vettore $\vec{W}=\frac{1}{2}\vec{V}$.

Lasciamo al lettore il compito di verificare che sussistono le relazioni di seguito indicate.

$$P(x;y)\xrightarrow{\tau\circ\sigma_\Omega}P''\left(x''=2\left(x_\Omega+\frac{V_x}{2}\right)-x;\,y''=2\left(y_\Omega+\frac{V_y}{2}\right)-y\right)$$