Trasformazioni nel piano cartesiano

(simmetria assiale)

Si consideri in un piano dotato di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy la parabola $\gamma: 2x^2+3x+2y=0$.

1. Determinare l'equazione della retta *t* tangente a γ nell'origine degli assi e rappresentare le due curve.
2. Scrivere le equazioni della simmetria assiale avente per asse la retta t.
3. Determinare l'equazione della parabola γ′ trasformata di γ nella simmetria suddetta.
4. Di γ′ determinare l'equazione dell'asse di simmetria e le coordinate del vertice. Rappresentare γ′.
5. Dimostrare che le parabole γ, γ′ sono tangenti.

Soluzione

1. Quando una conica passa per l'origine degli assi l'equazione della retta tangente in detto punto si ottiene uguagliando a zero la somma dei termini di primo dell'equazione della curva. L'equazione della tangente t è perciò t:3x+2y=0.
2. Ricordiamo che la simmetria assiale rispetto ad una retta *r* trasforma il generico punto P(x;y) del piano nel punto P′(x′;y′) simmetrico di P rispetto alla retta *r*. Conoscendo l'equazione dell'asse di simmetria $r: ax+by+c=0$, il legame tra le coordinate dei punti P , P′ si ottiene imponendo che le coordinate del punto medio del segmento PP′ verifichino l'equazione dell'asse di simmetria ed inoltre che la retta congiungente i punti P, P′ sia perpendicolare all'asse di simmetria. Questa seconda condizione, dal punto di vista algebrico, se l'asse di simmetria non è parallelo all'asse delle ascisse, si traduce uguagliando il coefficiente angolare della retta [P; P′] all'opposto del reciproco (antireciproco) del coefficiente angolare dell'asse di simmetria. Si imposta perciò il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} a\left(\frac{x+x'}{2}\right)+b\left(\frac{y+y'}{2}\right)+c=0 \\ \frac{y-y'}{x-x'}=\frac{b}{a} \end{cases}$$

che risolto rispetto alle incognite *x′*, *y′* permette di ricavare le equazioni della simmetria assiale.
Nel caso specifico, l'asse di simmetria è la retta t tangente alla parabola nell'origine il cui coefficiente angolare è *m*=-3/2; il sistema di equazioni da impostare è il seguente

$$\begin{cases} 3\left(\frac{x+x'}{2}\right)+2\left(\frac{y+y'}{2}\right)=0 \\ \frac{y-y'}{x-x'}=\frac{2}{3} \end{cases}$$

che risolto fornisce le seguenti espressioni

$$\begin{cases} x'=-\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y \\ y'=-\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y \end{cases} \qquad (1)$$

3. Per ricavare l'espressione algebrica dell'equazione della parabola γ′, simmetrica di γ, è necessario determinare le espressioni delle coordinate x, y in funzione delle coordinate x′, y′ a partire dalle equazioni della simmetria assiale. Si tratta di risolvere

il sistema (1) nelle incognite x, y. Sviluppando i calcoli si ottengono le seguenti espressioni:

$$\sigma_t^{-1}:\begin{cases} x=-\frac{5}{13}x'-\frac{12}{13}y' \\ y=-\frac{12}{13}x'+\frac{5}{13}y' \end{cases} \qquad (2)$$

Che rappresentano in realtà la simmetria assiale inversa.

Osservazione

Il lettore non si meravigli del fatto che le equazioni ottenute per σ_t^{-1} siano formalmente identiche a quelle della simmetria σ_t, ciò è dovuto al fatto che la matrice delle simmetria σ_t

$A=\begin{bmatrix} -\frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}$ coincide con la sua inversa: $A^{-1}=A$

Per ottenere l'equazione della curva trasformata basta sostituire nell'equazione della parabola γ ad x e y le espressioni indicate nelle sistema (2), eliminare gli apici ed eseguire le operazioni algebriche necessarie per ricondurre l'equazione alla forma normale. Scriviamo solo l'impostazione ed indichiamo il risultato senza riportare i calcoli algebrici.

$$\gamma: 2x^2+3x+2y=0 \Rightarrow$$

$$\gamma': 2\left(-\frac{5}{13}x'-\frac{12}{13}y'\right)^2+3\left(-\frac{5}{13}x'-\frac{12}{13}y'\right)+2\left(-\frac{12}{13}x'+\frac{5}{13}y'\right)=0 \Rightarrow$$

$$\gamma': 50x^2+288y^2+240xy-507x-338y=0$$

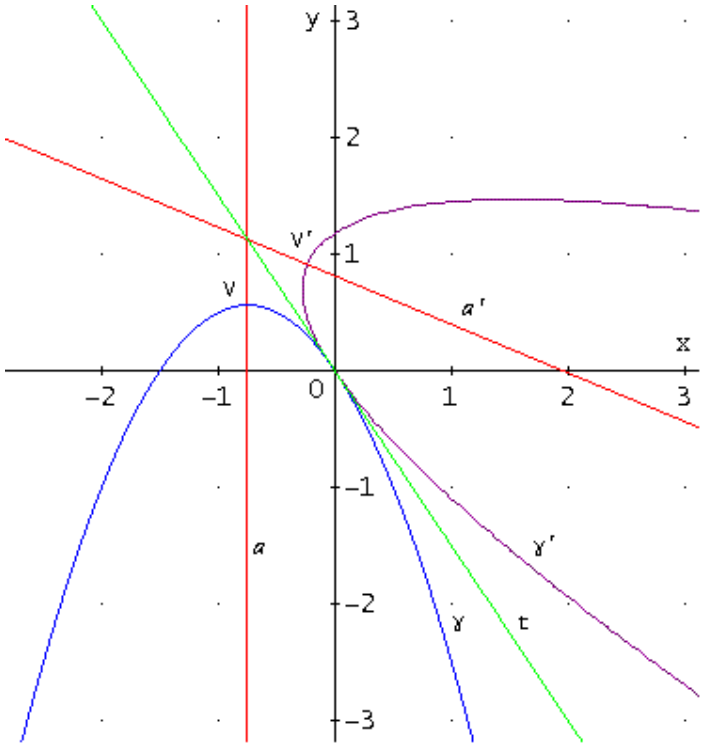
4. La parabola γ ha per asse di simmetria la retta $a: x=-\frac{3}{4}$; per ottenere l'equazione della retta corrispondente nelle simmetria assiale in esame basta sostituire ad x l'espressione indicata nel sistema (2). Una volta eliminati gli apici si ricava l'equazione dell'asse a' di γ'. Si ha:

$$a: x=-\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad a': 20x+48y-39=0$$

Coordinate del vertice di γ'

Il vertice di γ' è l'immagine del vertice V di γ. Poiché risulta

$$V\left(-\frac{3}{4};\frac{9}{16}\right) \Rightarrow V':\begin{cases} x=-\frac{5}{13}\left(-\frac{3}{4}\right)-\frac{12}{13}\cdot\frac{9}{16}=-\frac{3}{13} \\ y=-\frac{12}{13}\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{5}{13}\cdot\frac{9}{16}=\frac{189}{208} \end{cases}$$

Le parabole, con i rispettivi assi di simmetria e la retta tangente t sono rappresentate nella figura riportata alla fine dell'esercizio.

5. Per verificare che le parabole γ e γ' sono tangenti si potrebbe risolvere il sistema formato dalle loro equazioni e verificare che questo ammette le coordinate dell'unico punto comune (che è l'origine) come soluzioni doppie. Si può però osservare che la retta t è tangente a γ nell'origine ed essendo la retta l'asse di simmetria della simmetria assiale σ_t tutti i suoi **punti** sono **uniti** (coincidono con i loro trasformati); d'altra parte, l'immagine della retta t nella simmetria è la retta tangente a γ' nel punto immagine del punto di contatto tra t e γ, cioè del punto O, dunque le due parabole hanno nel punto O la stessa retta tangente e ciò è sufficiente per affermare che le due parabole sono ivi tangenti.