Trasformazioni Geometriche

Problema_1 (Trasformazioni Geometriche)[1]

Considerata nel piano cartesiano la trasformazione $\tau:\begin{cases} x' = y-1 \\ y' = 2x+3 \end{cases}$, risolvere i seguenti quesiti.

Q1- Determinare gli eventuali punti uniti.
Q2- Riconosciuto che la trasformazione ammette solo un punto unito, detto Ω tale punto, verificare che la parabola $\lambda: y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ passa per Ω e trovare l'equazione della parabola trasformata $\lambda' = \tau(\lambda)$. Rappresentare le due parabole λ, λ′ nello stesso riferimento cartesiano.
Q3- Determinare l'area del segmento parabolico delimitato dall'asse delle ascisse e dalla parabola λ.
Q4- Sfruttando le proprietà dell'affinità τ, calcolare l'area del segmento parabolico delimitato da λ′ con la retta trasformata dell'asse delle ascisse nella trasformazione τ.

Soluzione

Q1- La trasformazione τ è un'affinità il cui determinante vale D=-2. Per ricercare eventuali punti uniti si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} x = y-1 \\ y = 2x+3 \end{cases}$$

che ammette come soluzione *x*=-2, *y*=-1. Esiste dunque un solo punto unito ed è Ω(-2;-1).

Q2- L'equazione della parabola è soddisfatta dalla coordinate di Ω, come si verifica facilmente.

Equazione della parabola trasformata.
Si ottiene l'equazione di $\lambda' = \tau(\lambda)$ ricavando dalle equazioni della trasformazione x ed y in funzione di x′, y′ e sostituendole nell'equazione di λ; una volta eliminati gli apici si ricava l'equazione della parabola trasformata.

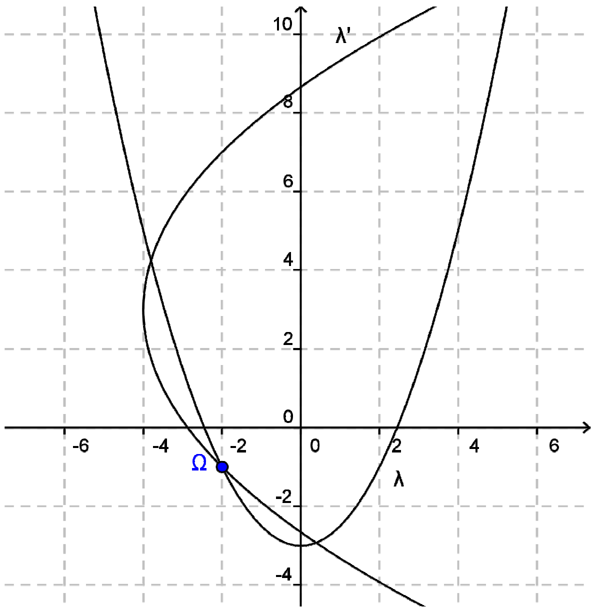

Figura 1

$$\lambda': x'+1 = \frac{1}{2}\left(\frac{y'-3}{2}\right)^2 - 3 \qquad \rightarrow$$

$$\lambda': x = \frac{1}{8}y^2 - \frac{3}{4}y - \frac{23}{8}$$

Le due parabole sono rappresentate in Figura 1.
Q3- La parabola λ interseca l'asse delle ascisse nei punti $A(\sqrt{6};0)$, $B(-\sqrt{6};0)$. Osservato che il vertice di λ è V(0;-3), l'area del segmento parabolico è

$$Area(Seg\_par) = \frac{2}{3}\overline{AB}\cdot|y_V| = \frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{6}\cdot 3 = 4\sqrt{6}$$

Q4- La retta trasformata dell'asse delle ascisse nella trasformazione τ è la retta r′ di equazione

[1] Problema assegnato nella prova di recupero debiti nella classe 4E il 4-set-2010

$r': x+1=0$
che interseca la parabola λ′ nei punti

$$A' = \tau(A) = \left(-1; 4\sqrt{6}+3\right),$$

$$B' = \tau(B) = \left(-1; -4\sqrt{6}+3\right).$$

Tenendo presente il significato di rapporto di affinità, possiamo concludere che l’area del segmento parabolico delimitato dalla parabola λ′ con la retta r′ è pari al prodotto dell’area del segmento parabolico delimitato dall’asse delle ascisse con la parabola λ con il valore assoluto del rapporto di affinità. Quindi:

$$Area\left(Seg\_par\left(A'B'V'\right)\right) = 4\sqrt{6}\cdot\left|-2\right| = 8\sqrt{6}$$

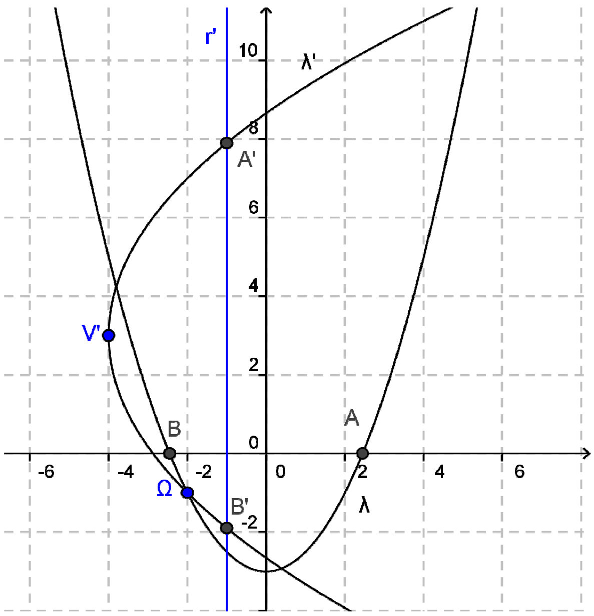

Figura 2