

Trasformazioni geometriche nel piano cartesiano

Simmetria assiale e area di un segmento parabolico

Problema_2⁽¹⁾

Si consideri nel piano cartesiano la parabola $\lambda: x = ky^2 - 2$. Risolvere i seguenti quesiti.

Q1- Determinare il valore del parametro k per il quale la curva passa dal punto $A(2;2)$.

Q2- Determinare l'equazione della parabola λ' simmetrica di λ rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Rappresentare le due parabole insieme alla suddetta bisettrice e riconoscere che le curve hanno in comune oltre al punto A un secondo punto B di cui si chiedono le coordinate.

Q3- Determinare l'area della regione finita di piano delimitata dagli archi delle due parabole aventi per estremi i punti A e B .

Soluzione

Q1- Imponendo che le coordinate del punto A verifichino l'equazione della parabola si ottiene l'equazione $2 = 4k - 2$ dalla quale si ricava $k = 1$. La parabola in esame è perciò:

$$\lambda: x = y^2 - 2$$

Q2- Ricordiamo che le equazioni della simmetria assiale avente per asse la bisettrice del primo e terzo quadrante sono:

$$\sigma_{y=x}: \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \quad \text{L'equazione della parabola trasformata si ottiene sostituendo } x \text{ con } y \text{ ed } y \text{ con } x.$$

$$\lambda: x = y^2 - 2 \xrightarrow{\sigma_{y=x}} \lambda': y = x^2 - 2$$

Per determinare i punti di intersezione tra le due parabole e la bisettrice $y=x$, considerato che nella simmetria assiale in esame i punti della bisettrice restano uniti, basta determinare i punti comuni tra la suddetta bisettrice ed una delle due parabole. Risolviamo il sistema formato dall'equazione della bisettrice e da quella di λ .

$$\begin{cases} y = x \\ x = y^2 - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ y^2 - y - 2 = 0 \end{cases};$$

l'equazione $y^2 - y - 2 = 0$ ammette come soluzioni $y_1 = -1, y_2 = 2$.

Concludiamo che la retta e la parabola hanno in comune i punti $A(2;2)$, $B(-1;-1)$.

Le curve e la bisettrice sono rappresentate a lato.

Q3- La regione piana di cui si deve determinare l'area è composta da due segmenti parabolici isometrici; è sufficiente determinare l'area di uno di essi.

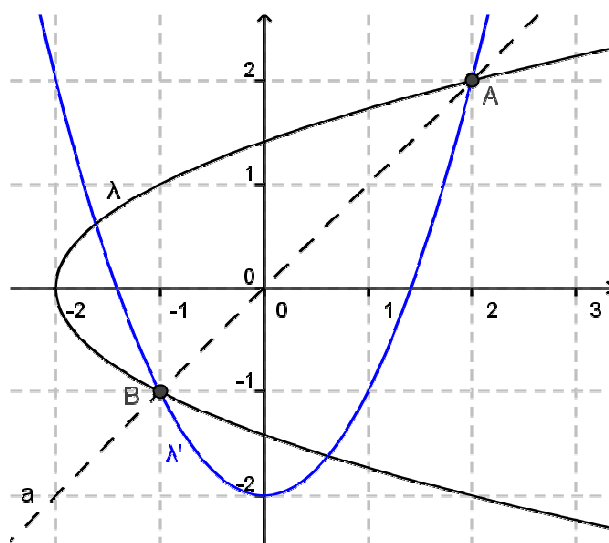
Consideriamo il segmento parabolico formato dalla parabola λ e dalla bisettrice.

Per calcolare l'area si deve ricorrere al teorema di Archimede: $Area = \frac{2}{3} \cdot \overline{AB} \cdot h$, essendo h la misura della distanza dalla base AB della retta t tangente alla parabola e parallela alla stessa base.

Ricerca dell'equazione della retta tangente t .

La retta t ha lo stesso coefficiente angolare della bisettrice, dunque la sua equazione cartesiana è del tipo:

$$t: y = x + q$$



⁽¹⁾ Problema assegnato nel compito in classe M7_4I_04-06-2010

Mettendo a sistema l'equazione della tangente con quella della parabola ed imponendo che l'equazione risolvente abbia radici coincidenti ($\Delta=0$) si trova il valore del parametro q .

$$\begin{cases} t: y = x + q \\ \lambda: x = y^2 - 2 \end{cases} \rightarrow y^2 - y + q - 2 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4(q - 2) = 0 \rightarrow q = \frac{9}{4}$$

Concludiamo che l'equazione della retta tangente è $t: y = x + \frac{9}{4}$

Occorre ora determinare la distanza tra la retta t e la retta della base, indicata con a in figura; a tal proposito ricordiamo che la distanza tra le due rette parallele r, s

$$r: ax + by + c = 0, \quad s: ax + by + c' = 0,$$

$$\text{è} \quad d(r, s) = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{Nel nostro caso si ha: } d(a, s) = \frac{9}{4\sqrt{2}}$$

Misura del segmento AB

Applicando la formula per la distanza tra due punti

$$\text{si ha: } \overline{AB} = 3\sqrt{2}.$$

Area del segmento parabolico:

$$\text{Area} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AB} \cdot h = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{9}{4\sqrt{2}} = \frac{9}{2}$$

Area della regione piana richiesta

Concludiamo che l'area della regione piana in esame vale 9.

