# Trasformazioni geometriche nel piano cartesiano

## Applicazione delle similitudini

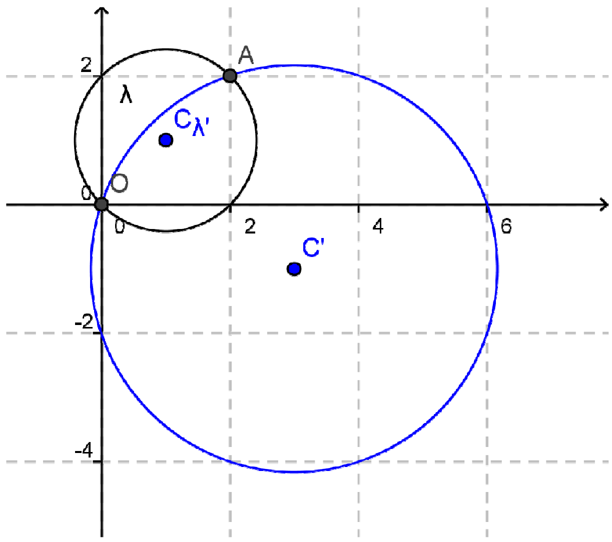
**Problema_2**[1]

Nel piano cartesiano si consideri la trasformazione $\tau:\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -kx + y \end{cases}$. Risolvere i quesiti seguenti.

**Q1**- Determinare per quale valore del parametro k la trasformazione è una similitudine.
**Q2**- Stabilire se la similitudine trovata ammette punti uniti.
**Q3**- Considerata la circonferenza λ di centro C(1;1) e raggio $r = \sqrt{2}$, determinare l'equazione della circonferenza $\lambda' = \tau(\lambda)$. Rappresentare le due circonferenze nello stesso riferimento cartesiano dopo aver determinato gli eventuali punti comuni.
**Q4**- Riconosciuto che i punti O(0;0), A(2;2),B(2;0) appartengono a λ, determinare i corrispondenti punti O′, A′, B′ di λ′, quindi calcolare l'area dei due triangoli OAB, O′A′B′.
**Q5**- Stabilire se la similitudine in questione ammette rette unite.

### Soluzione

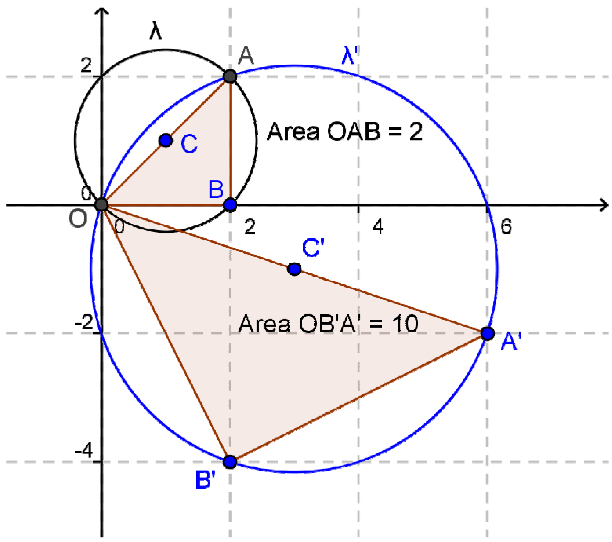
**Q1**- Ricordiamo che considerata in un piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane xOy l'applicazione $\tau:\pi \to \pi$ avente equazioni $\tau:\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}$ è una similitudine se risulta $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ e inoltre si verifica una delle due eventualità 1) *a*=*d* e *b*=-*c*, oppure 2) *a*=-*d* e *b*=*c*.




Poiché nel caso considerato $\tau:\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -kx + y \end{cases}$, confrontando le equazioni con il modello di riferimento si osserva che *a*=*d* segue che deve essere $-k = 2 \to k = -2$.
La similitudine da considerare è perciò
$\tau:\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -2x + y \end{cases}$.

**Q2**- Punti uniti. $\tau:\begin{cases} x = x + 2y \\ y = -2x + y \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

L'unico punto unito è l'origine O del sistema di riferimento.
**Q3**- La circonferenza in questione è
$\lambda:(x-1)^2 + (y-1)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \to$
$\lambda: x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$
L'equazione della circonferenza trasformata è
$\lambda': x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$.
Risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle due circonferenze si riscontra che hanno in comune l'origine O degli assi (punto unito) ed il punto A(2;2).
**Q4**- Dei punti O(0;0), A(2;2),B(2;0) abbiamo già visto nel precedente quesito Q3 che i primi due appartengono ad entrambe le circonferenze; si




[1] Problema assegnato nel compito in classe M7_4E_03-06-2010

riconosce che anche il punto B (2;0) appartiene alla circonferenza $\lambda$ , perché le sue coordinate ne verificano l'equazione. Per quanto concerne i punti trasformati:
O′, è punto unito nella trasformazione; A′ ha coordinate (6;-2) e B′(2;-4).
**Area di OAB**- Il triangolo è rettangolo isoscele su OA, con i cateti che misurano 2; la sua area vale S=2. L'area del triangolo OA′B′ si può determinare sfruttando le proprietà della trasformazione: $S' = 5 \cdot S = 10$.
**Q5**- Si dimostra che non esistono rette unite. Infatti, considerata la retta $r: ax+by+c=0$ , la sua trasformata è $r': (a-2b)x+(2a+b)y+c=0$ e dovendo risultare ($a-2b=a$) e ($2a+b=b$) segue che deve essere $a=0$ e $b=0$. Tenendo ora presente che nell'equazione di una retta la coppia ($a;b$) deve essere diversa dalla coppia nulla (0;0) si conclude che la trasformazione non ammette rette unite.