

Trasformazioni geometriche nel piano cartesiano

Simmetria centrale e traslazione

Problema_1¹

In un piano riferito al sistema di coordinate cartesiane ortogonali xOy si considerino il punto C(2;-1) ed il vettore $\vec{V} = -2\hat{i} + \hat{j}$. Risolvere i quesiti che seguono.

Q1- Scrivere le equazioni della simmetria centrale σ_C di centro il punto C e le equazioni della traslazione τ determinata dal vettore $\vec{V}$.

Q2- Determinare le equazioni della trasformazione $\tau \circ \sigma_C$ e dimostrare che essa ammette un punto unito U di cui si chiedono le coordinate.

Q3- Considerata la parabola $\lambda: y = -\frac{1}{2}x^2$, trovare l'equazione della parabola trasformata

$$\lambda' = \tau \circ \sigma_C(\lambda).$$

Q4- Rappresentare le due parabole λ, λ' nello stesso riferimento cartesiano e precisare la reciproca posizione determinando gli eventuali punti comuni.

Q5- Dimostrare che la trasformazione $\tau \circ \sigma_C$ è la simmetria centrale avente centro in U e che in essa risulta unita ogni retta del fascio di centro U.

Soluzione

Q1- Le trasformazioni richieste sono $\sigma_C: \begin{cases} x' = 2x_C - x = 4 - x \\ y' = 2y_C - y = -2 - y \end{cases}, \tau: \begin{cases} x' = x + V_x = x - 2 \\ y' = y + V_y = y + 1 \end{cases}$

Q2- Le equazioni della trasformazione composta sono $\tau \circ \sigma_C: \begin{cases} x'' = 2 - x \\ y'' = -1 - y \end{cases}$

Punto unito: $\begin{cases} x = 2 - x \\ y = -1 - y \end{cases} \rightarrow U\left(1; -\frac{1}{2}\right)$

Q3- $\lambda: y = -\frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{\tau \circ \sigma_C} \lambda': -1 - y = -\frac{1}{2}(2 - x)^2 \rightarrow \lambda': y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

Q4- Risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle due parabole si riscontra che esiste una sola soluzione; le due parabole hanno in comune solo il punto $U\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ in cui sono tangenti. La retta

tangente comune è $t: 2x + 2y - 1 = 0$. Vedere la figura a lato.

Q5- Osservato che le equazioni della trasformazione si possono scrivere nella forma

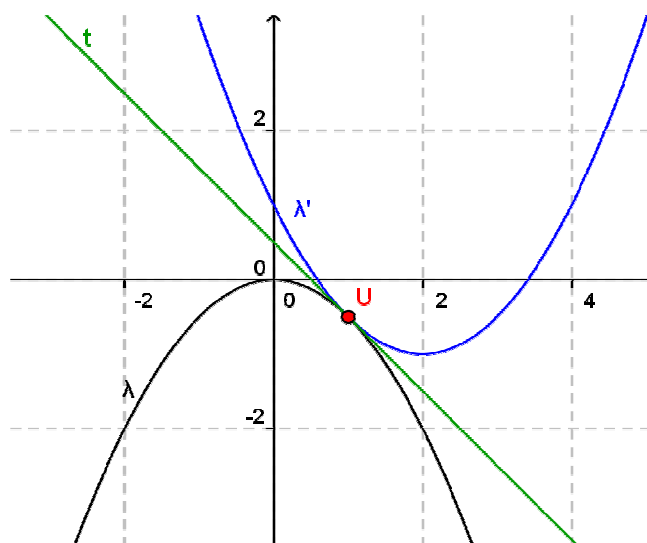
$$\tau \circ \sigma_C: \begin{cases} \frac{x'' + x}{2} = 1 \\ \frac{y'' + y}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}, \text{ si deduce che si tratta}$$

della simmetria centrale di centro il punto

$M\left(1; -\frac{1}{2}\right)$; il punto M coincide con il punto

unito U già trovato.

Rette unite- Poiché la trasformazione è una



¹ Problema assegnato nel compito in classe M7_4E_03-06-2010

simmetria centrale in essa ogni retta passante per il centro di simmetria è retta unita, ma non retta di punti uniti.