

Omotetia applicata ad una parabola

Retta tangente alla parabola, unita nella trasformazione⁽¹⁾

Q1-In un piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane xOy , scrivere le equazioni dell'omotetia Ω avente centro in C(-3;0) e rapporto $k=3/2$.

Q2- Considerare la parabola $\lambda: x = \frac{3}{4}y^2 - \frac{3}{2}y$ e rappresentarla nel piano cartesiano.

Q3- Scrivere l'equazione della retta **t** tangente a λ condotta da C ed avente coefficiente angolare positivo; sia A il punto di contatto. Dimostrare che la suddetta retta **t** è una retta unita nell'omotetia. Determinare il punto $\Omega(A)$.

Q4- Trovare l'equazione della parabola trasformata $\Omega(\lambda)=\lambda'$. Dimostrare che λ' è tangente ancora alla retta e determinare il punto di contatto.

Q5- L'asse y determina con la parabola λ un segmento parabolico P_1 e la retta trasformata dell'asse y nell'omotetia Ω determina con la parabola $\Omega(\lambda)=\lambda'$ un altro segmento parabolico P_2 . Determinare le aree dei due segmenti parabolici e il rapporto delle stesse.

Q6- Realizzare una figura contenente gli elementi geometrici elaborati ed altri elementi significativi.

Soluzione

Q1- L'omotetia Ω trasforma il punto P(x;y) nel punto P'(x';y') secondo le leggi

$$\Omega: \begin{cases} x' = x_C + \frac{3}{2}(x - x_C) \\ y' = y_C + \frac{3}{2}(y - y_C) \end{cases} \rightarrow \Omega: \begin{cases} x' = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \\ y' = \frac{3}{2}y \end{cases} \rightarrow \Omega^{-1}: \begin{cases} x = \frac{2}{3}x' - 1 \\ y = \frac{2}{3}y' \end{cases}$$

Q2- La parabola è rappresentata nella figura riepilogativa.

Q3- Equazione della retta tangente alla parabola condotta da C(-3;0) ed avente coefficiente angolare positivo è $t: 2x - 3y + 6 = 0$. Il punto di contatto con la parabola è A(0;2).

Retta trasformata

$$\Omega(t): 2\left(\frac{2}{3}x' - 1\right) - 3\left(\frac{2}{3}y'\right) + 6 = 0 \rightarrow \Omega(t): 2x - 3y + 6 = 0$$

La retta è unita nell'omotetia perché coincide con la sua trasformata. Si badi, però, che la retta non è composta da punti uniti. L'unico punto unito nell'omotetia è il centro C della stessa.

Trasformato di A(0;2) $\rightarrow A'\left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

Q4- Equazione della parabola trasformata.

$$\Omega(\lambda): \frac{2}{3}x' - 1 = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}y'\right)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}y'\right) \rightarrow \Omega(\lambda) = \lambda': x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}$$

⁽¹⁾ Problema assegnato nel compito in classe M6_4D_29-05-12, Indirizzo PNI

$$\text{Vertice } V\left(-\frac{3}{4}; 1\right) \rightarrow \Omega(V) = \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{2}; \frac{3}{2} \cdot 1\right) = \left(\frac{3}{8}; \frac{3}{2}\right)$$

λ' è tangente ancora alla retta?

Lasciamo al lettore il compito di verificare che risolvendo il sistema formato tra l'equazione della parabola λ' e quella della retta $t: 2x - 3y + 6 = 0$ si ottengono soluzioni coincidenti, precisamente

la soluzione doppia è formata dalla coppia $\left(x = \frac{3}{2}; y = 3\right)$, che rappresenta appunto le coordinate

cartesiane del punto $\Omega(A)$. Noi ci limitiamo a far notare che il punto A di contatto tra la retta t e la parabola λ deve necessariamente avere come immagine nell'omotetia il punto A' di contatto tra la retta t (retta unita) e la parabola trasformata λ' .

Q5- L'asse delle ordinate ha come trasformata la retta $r: 2x - 3 = 0$.

Il segmento parabolico P_1 ha area 1. L'area del segmento parabolico P_2 si può ottenere direttamente utilizzando il “**rapporto di affinità**” dell'omotetia, che sappiamo essere dato dal valore assoluto del determinante del sistema delle equazioni della trasformazione; detto valore è uguale al

quadrato del rapporto di omotetia: $|D| = k^2 = \frac{9}{4}$.

Poiché il rapporto tra l'area del segmento parabolico P_2 e l'area di P_1 è proprio k^2 , deduciamo

$$\text{Area}(P_2) = k^2 \cdot \text{Area}(P_1) = \frac{9}{4}$$

Q6- Gli elementi geometrici richiesti elaborati sono riportati nella figura a lato.

