

Conica rototraslata: ellisse⁽¹⁾

Considerata nel riferimento cartesiano la conica avente equazione

$$\lambda : 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 30x - 18y + 37 = 0$$

risolvere i quesiti che seguono.

Q1- Classificare la conica, precisando in particolare se ammette centro di simmetria.

Q2- Riconosciuto che la conica è dotata di centro proprio, determinare le coordinate di detto punto applicando un metodo a piacere.

Q3- Scrivere le equazioni della traslazione τ che applicata alla conica la trasla portando il suo centro C nell'origine degli assi. Determinare l'equazione della conica traslata con un metodo a scelta. Scrivere l'equazione della conica $\tau(\lambda) = \lambda'$.

Q4- Determinare le equazioni di una trasformazione $\varphi: \pi \rightarrow \pi$ che applicata alla conica $\tau(\lambda) = \lambda'$ permette di ottenere una conica con gli assi di simmetria paralleli agli assi coordinati. Determinare successivamente l'equazione cartesiana della conica $\varphi(\lambda') = \lambda''$.

Q5- Realizzare un disegno riepilogativo in cui compaiano le tre coniche λ'' , λ' , λ e loro elementi caratteristici.

Soluzione

Q1- Per classificare la conica si deve innanzitutto calcolare il suo determinante per stabilire il genere (conica non degenerare o degenerare)

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -15 \\ 3 & 5 & -9 \\ -15 & -9 & 37 \end{vmatrix} = (925 + 405 + 405) - (1125 + 405 + 333) = 1735 - 1863 = -128$$

La conica è non degenerare. Calcoliamo il valore di A_{33} per stabilire il tipo di conica.

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 9 = 16 > 0$$

La conica è un'ellisse, dunque ha centro proprio. Sia C il centro.

Q2- Le coordinate del centro proprio di una conica la cui equazione sia

$$\lambda : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Si ottengono come soluzione del sistema seguente

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

Nel caso specifico il sistema è il seguente

⁽¹⁾ Problema assegnato nel compito in classe M6_4D_29-05-12, Indirizzo PNI

$$\begin{cases} 5x+3y-15=0 \\ 3x+5y-9=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$$

Il centro della conica è il punto C(3;0).

Q3- Le equazioni della traslazione richiesta sono

$$\tau: \begin{cases} x' = x - x_C \\ y' = y - y_C \end{cases} \rightarrow \tau: \begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y \end{cases} \quad (1)$$

Per ottenere l'equazione della conica trasformata si ricavano dalle precedenti equazioni x e y in funzione di x' , y' e si sostituiscono nell'equazione di λ ; eliminando gli apici e semplificando l'espressione si perviene all'equazione cercata.

$$\tau^{-1}: \begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' \end{cases} \rightarrow \tau(\lambda) = \lambda': 5(x'+3)^2 + 6(x'+3)y' + 5(y')^2 - 30(x'+3) - 18y' + 37 = 0 \rightarrow$$

$$\lambda': 5(x^2 + 6x + 9) + 6xy + 18y + 5y^2 - 30x - 90 - 18y + 37 = 0 \rightarrow \lambda': 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$$

Q4- L'equazione ottenuta è quella di un'ellisse ruotata rispetto all'origine. Occorre individuare l'ampiezza dell'angolo α di cui farla ruotare per disporla con gli assi di simmetria paralleli agli assi coordinati.

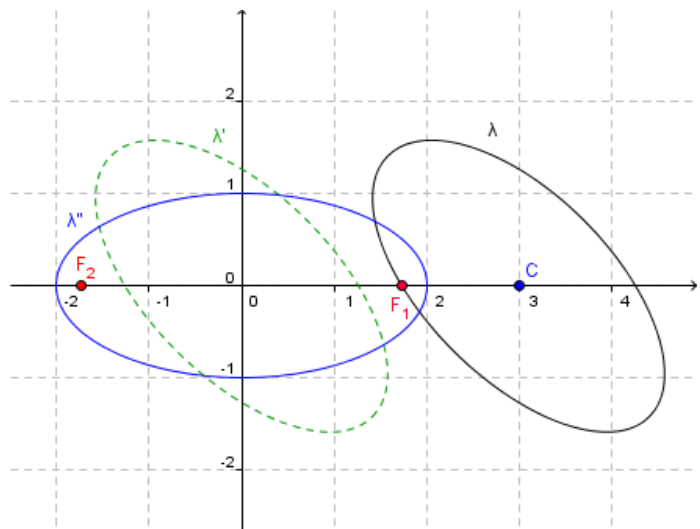
Le equazioni della rotazione in senso antiorario intorno all'origine di un angolo α sono:

$$\rho_\alpha: \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

e quelle della rotazione inversa

$$\rho_\alpha^{-1}: \begin{cases} x = x' \cos(-\alpha) - y' \sin(-\alpha) \\ y = x' \sin(-\alpha) + y' \cos(-\alpha) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rho_\alpha^{-1}: \begin{cases} x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \\ y = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases} \quad (2)$$



In figura sono rappresentate l'ellisse originaria, quella traslata e quella ruotata.

Per ottenere l'equazione dell'ellisse ruotata si devono sostituire le espressioni di x , y date dalle (2) nell'equazione di λ' e semplificare. Si ha:

$$\rho_\alpha(\lambda'): (5 \cos^2 \alpha - 6 \sin \alpha \cos \alpha + 5 \sin^2 \alpha) x^2 + 6(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) xy + (5 \sin^2 \alpha + 6 \sin \alpha \cos \alpha + 5 \cos^2 \alpha) y^2 - 8 = 0 \rightarrow$$

$$\rho_\alpha(\lambda'): (5 - 6 \sin \alpha \cos \alpha) x^2 + 6(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) xy + (5 + 6 \sin \alpha \cos \alpha) y^2 - 8 = 0$$

L'equazione ottenuta, per rappresentare un'ellisse con gli assi paralleli agli assi coordinati, deve avere nullo il coefficiente del termine rettangolare xy .

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0 \quad (3)$$

Un qualsiasi valore dell'angolo α che soddisfa la (3) è idoneo. Assumiamo $\alpha = 45^\circ$.

Le equazioni della rotazione intorno all'origine con $\alpha = 45^\circ$ in senso antiorario sono

$$\rho_{\alpha=45^\circ} : \begin{cases} x' = x \frac{\sqrt{2}}{2} - y \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = x \frac{\sqrt{2}}{2} + y \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

L'equazione della curva trasformata diventa

$$\rho_{\alpha}(\lambda') : \left(5 - 6 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) x^2 + \left(5 + 6 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) y^2 - 8 = 0 \rightarrow \rho_{\alpha}(\lambda') : x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

Scrivendo l'equazione dell'ellisse nella forma canonica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

quindi

$$\rho_{\alpha}(\lambda') : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

si riconosce che la curva ha i fuochi sull'asse delle ascisse perché $a^2 = 4 > 1 = b^2$. I due fuochi, con $c^2 = a^2 - b^2 = 3 \rightarrow c = \sqrt{3}$, sono $F_1(\sqrt{3}; 0), F_2(-\sqrt{3}; 0)$. L'eccentricità dell'ellisse è: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Osserviamo che le tre ellissi rappresentate in figura sono isometriche perché ottenute sottoponendo l'ellisse di partenza a due isometrie, la prima è stata una traslazione, la seconda una rotazione intorno all'origine O degli assi cartesiani. Le tre curve hanno dunque le stesse dimensioni e quindi anche la stessa eccentricità.

[Comando in GeoGebra per ottenere la rappresentazione della conica](#)

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 30x - 18y + 37 = 0$$