Composizione di isometrie

Nel piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali xOy si considerino le due parabole di equazioni

$$\gamma_1 : x = \frac{1}{2}y^2, \qquad \gamma_2 : y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{8}.$$

Riconoscere che le due parabole sono isometriche provando che esiste un' isometria che trasforma γ_1 in γ_2.

Elaborazioni

Osserviamo preliminarmente che la forma geometrica di una parabola avente asse di simmetria parallelo ad uno degli assi coordinati, e quindi la cui equazione sia di una delle due forme

$y = ax^2 + bx + c$, $x = a'y^2 + b'y + c'$, è determinata dal valore assoluto del coefficiente del termine di secondo grado; pertanto, ad equazioni come quelle indicate nelle quali detti coefficienti hanno uguale valore assoluto corrispondono parabole congruenti e quindi per esse è possibile determinare un'isometria nel piano cartesiano che permette di passare dal diagramma di una a quello dell'altra.

Proveremo il quesito posto costruendo un'isometria tramite una rotazione ed una traslazione.

Rotazione

Consideriamo la rotazione di 90° intorno all'origine degli assi in senso orario.

Ricordiamo che le equazioni della rotazione nel verso antiorario dell'angolo α intorno all'origine degli assi sono

$$\rho_\alpha : \begin{cases} x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot sen\alpha \\ y' = x \cdot sen\alpha + y \cdot \cos\alpha \end{cases}, \qquad (1)$$

nel senso che il punto P(x;y) viene trasformato nel punto P'(x';y') , con (x';y') espresse dalle equazioni (1).

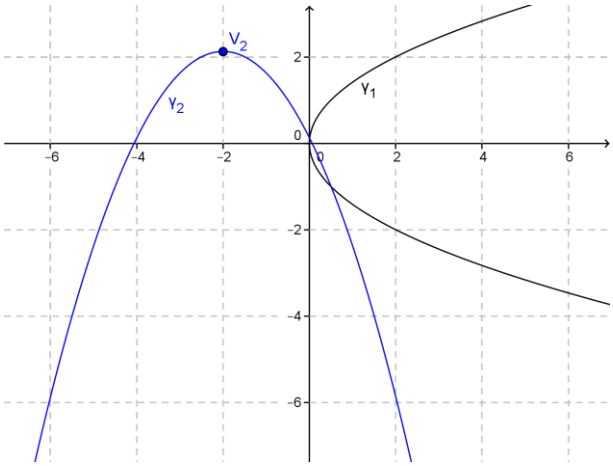

Figura 1

Nel nostro caso la rotazione deve avvenire nel verso orario, dunque α=-90°, pertanto le equazioni della trasformazione sono

$$\rho_{-90°} : \begin{cases} x' = x \cdot \cos(-90°) - y \cdot sen(-90°) \\ y' = x \cdot sen(-90°) + y \cdot \cos(-90°) \end{cases} \rightarrow \rho_{-90°} : \begin{cases} x' = y \cdot sen(90°) = y \\ y' = -x \cdot sen(90°) = -x \end{cases}$$

La rotazione in oggetto trasforma la parabola γ_1 nella parabola γ_1' la cui equazione nel sistema di riferimento xOy si ottiene da quella di γ_1 sostituendo y con x' , x con -y' e successivamente eliminando gli apici. Riportiamo i passaggi

$$\gamma_1 : x = \frac{1}{2}y^2 \overset{\rho_{-90°}}{\rightarrow} \gamma_1' : -y' = \frac{1}{2}(x')^2 \rightarrow \gamma_1' : y = -\frac{1}{2}x^2$$

La parabola γ_1' ottenuta ha il vertice nell'origine degli assi, asse di simmetria coincidente con l'asse y e concavità rivolta verso il basso. Applichiamo alla nuova parabola la **traslazione τ** che porta il suo vertice nel vertice della parabola γ_2 che è il punto $V_2\left(-2;\frac{17}{8}\right)$. La traslazione τ ha equazioni

$$\tau : \begin{cases} x' = x + x_{V_2} \\ y' = y + y_{V_2} \end{cases} \qquad (2)$$

quindi trasforma il punto (x;y) nel punto $\left(x' = x - 2; y' = y + \frac{17}{8}\right)$. Per ottenere l'equazione della parabola traslata $\gamma_1'' = \tau(\gamma_1')$ basta sostituire nell'equazione di γ_1' la variabile x con x'+2 e la variabile y con $y' - \frac{17}{8}$, quindi eliminare gli apici.

$$\gamma_1' : y = -\frac{1}{2}x^2 \overset{\tau}{\rightarrow} \gamma_1'' : y' - \frac{17}{8} = -\frac{1}{2}(x'+2)^2 \rightarrow \gamma_1'' : y = -\frac{1}{2}\left(x^2 + 4x + 4\right) + \frac{17}{8}$$

e riducendo i termini simili si ottiene

$$\gamma_1'' : y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{8}$$

Dal confronto dell'equazione di γ_1'' con quella di γ_2 si conclude che γ_1'' e γ_2 sono la stessa curva.

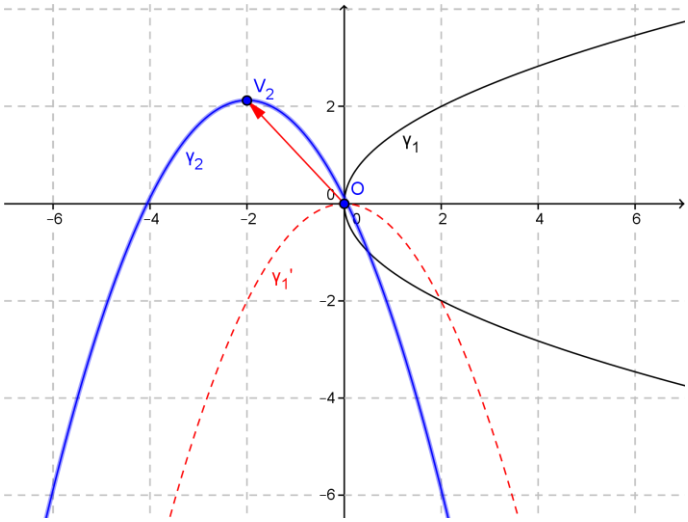

Figura 2-In figura sono rappresentati con colore rosso la parabola γ_1' ottenuta con la rotazione ed il vettore che determina la traslazione.

Osservazione

Si possono ottenere le equazioni dell'isometria risultante dall'applicazione successiva della rotazione $\rho_{-90°}$ e della traslazione τ da applicare direttamente alla parabola γ_1 per ottenere la parabola γ_2. Riportiamo di seguito le operazioni necessarie.

$$P(x;y) \overset{\rho_{-90°}}{\rightarrow} P'(x' = y; y' = -x) \overset{\tau}{\rightarrow} P''\left(x'' = x' - 2; y'' = y' + \frac{17}{8}\right) \equiv \left(x'' = y - 2; y'' = -x + \frac{17}{8}\right)$$

La trasformazione composta $\tau \circ \rho_{-90°}$ è definita dalle seguenti equazioni

$$\tau \circ \rho_{-90°} : \begin{cases} x" = y - 2 \\ y" = -x + \dfrac{17}{8} \end{cases} \qquad (3)$$

Applichiamo la trasformazione ottenuta alla parabola γ_1; si devono sostituire x con $-y"+\frac{17}{8}$, y con $x"+2$ ed eliminare gli apici.

$$\gamma_1 : x = \frac{1}{2}y^2 \xrightarrow{\tau \circ \rho_{-90°}} \gamma_1" : -y"+\frac{17}{8} = \frac{1}{2}\left(x"+2\right)^2 \rightarrow \gamma_1" : y = -\frac{1}{2}\left(x+2\right)^2 + \frac{17}{8}$$

Da cui $\gamma_1" : y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2 + \frac{17}{8} \rightarrow \gamma_1" : y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{8}$